Convexidade da Função Valor para o Estudo da Estabilidade dos Processos de Itô Controlados *

Elmer Lévano * João B. R. do Val ** Alessandro Vargas *

* Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica
Universidade Tecnológica Federal do Paraná–UTFPR
Cornélio Procópio, PR, Brasil.

e-mail: {elmerl,avargas}@utfpr.edu.br.

** Faculdade de Engenharia Elétrica
Universidade Estadual de Campinas–UNICAMP
Campinas, SP, Brasil.
e-mail: jbosco@fee.unicamp.br

Abstract: In this paper develops scenarios in where the value function of the stochastic dynamic programming problem is convex. In these scenarios the stability of the optimal processes is studied under some criterion developed in the literature.

Resumo: Em este artigo desenvolvemos dois cenários em que estudaremos a estabilidade dos processos de difusão via uma função valor convexa. Nesses cenários estuda-se a estabilidade dos processos ótimos sob algum critério desenvolvido na literatura.

Keywords: stability; multivariable diffusion; stochastic order; nonsmooth analysis.

Palavras-chaves: estabilidade; difusão multivariada; ordem estocástico; análise não linear.

1. INTRODUÇÃO

Uns dos principais problemas na programação dinâmica é conhecer *a priori* o comportamento no tempo da função valor.

Na literatura clássica, a teoria de controle de um modelo estocástico linear usa um custo quadrático na variável de estado e do controle, com ruído gaussiano, para resolver o problema da programação dinâmico estocástica, vide Yong and Zhou (1999); Fleming and Soner (2006); Åström (2012).

No princípio de otimização dinâmica considera-se a função valor sempre com suficiente suavidade i.e., funções de classe $C^{1,2}$ (diferenciável com respeito à variável temporal e duas vezes diferenciável com respeito à variável espacial, vide Fleming and Soner (2006)). Sem dúvida esta condição é facilmente violada, vide (Yong and Zhou, 1999, Exe. 2.3, Pag. 163).

Nesse sentido, estudar a estabilidade das soluções ótimas de sistemas via realimentação dos estados com custo não suave é bastante difícil. Desta forma muitos resultados ficam restritos à configuração tradicional de um estudo de estabilidade.

Na atualidade, existem alguns resultados interessantes que abordam este assunto em um contexto diferente, entre eles pode-se destacar Clark and Kiessler (2002); Pedrosa et al. (2017). Em do Val and Souto (2017) os autores provam a convexidade da função valor no horizonte infinito para

um custo quadrático descontado sujeito a uma dinâmica estocástica controlada.

Para o caso em que, a equação diferencial estocástica tem coeficiente *drift* semilinear, existe um trabalho recente (do Val and Lévano, 2018, Th. 4.16).

Neste artigo, prova-se a convexidade da função valor sujeita à dinâmica estocástica geral i.e., equação diferencial estocástica com coeficientes não lineares. Este caso ainda não foi abordado pela literatura.

Nesta formulação admite-se todas as leis de controle por realimentação de estados. O resultado principal é apresentado no Teorema 3. Este resultado depende diretamente de uma adequada escolha de uma ordenação estocástica que ajuda no estudo das propriedades assintóticas da função valor.

Finalmente, tendo a convexidade da função valor em mãos esta pode ser usada como uma função de Lyapunov para estudar a estabilidade dos processos de Itô controlados sob certos critérios de estabilidade estocástica.

Este artigo está estruturado da seguinte forma: Na Secção 2 são introduzidas as notações e conceitos necessários para o desenvolvimento deste trabalho. Na Secção 3 apresenta-se o resultado principal deste trabalho como Teorema 3, no qual, mostra-se a convexidade da função valor sujeito a uma dinâmica estocástica com coeficientes não lineares. Na Secção 4 apresenta-se um resultado da análise da otimização convexa, no marco do problema de controle estocástico, para a estabilidade dos processos ótimos usando critérios propostos em Meyn and Tweedie (1993). Finalmente, na Secção 5 apresenta-se as conclusões finais do trabalho.

* Agradecimentos à agência CAPES via o programa PNPD/CAPES pelo suporte financeiro.

2. NOTAÇÃO E CONCEITOS BÁSICOS

A seguir, são apresentadas alguns conceitos básicos.

Considera-se $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ como um espaço de probabilidade completo com uma filtração $\{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$ satisfazendo condições usuais. O superíndice $\top$ denota o transposto. O símbolo $\mathbf{E}$ denota o valor esperado com respeito à medida de probabilidade $\mathbf{P}$ e adota-se a notação padrão $\mathbf{P}_x(A) = \mathbf{P}(A|x_0 = x)$, e $\mathbf{E}_x[\cdot]$ significa valor esperado com respeito à medida de probabilidade $\mathbf{P}_x$. A norma euclidiana é denotada por $\|\cdot\|$.

Um processo de Itô controlado é descrito pela dinâmica estocástica representada pela seguinte equação diferencial homogênea:

$$dx_t = b(x_t, u_t)dt + \sigma(x_t, u_t)dW_t, \quad x_s = x \in \mathbb{R}^n, \quad (1)$$

em que $b : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ e $\sigma : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^{n \times r}$ para todo $t \geq s \geq 0$, são funções que satisfazem as condições de existência e unicidade de soluções fracas¹ dado um processo de Wiener padrão (Yong and Zhou, 1999, Ch. 2, Sec. 5.3).

Considera-se o processo $u_t \in \mathbb{R}^m$ para cada $t \in [0, T]$, em que, $u \in \mathcal{U}$, é o controle e $\mathcal{U}$ é uma família de controles admissíveis, $\{W_t\}_{t \in [0, T]}$ é um processo de Wiener em $\mathbb{R}^r$ definido sobre um espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$. A família de controles admissíveis $\mathcal{U}$ é definida por

$$\mathcal{U} = \{u_{(\cdot)} : [s, \infty) \times \Omega \rightarrow \mathbb{U} \subset \mathbb{R}^m \mid u_{(\cdot)} \text{ é } \mathcal{F}_t\text{-adaptado}\}. \quad (2)$$

O funcional de custo J que determina o rendimento do controlador no intervalo $[s, T]$, tal que

$$J(s, x, u) := \mathbf{E}_x \left[\int_s^T f(x_t, u_t)dt + h(x_T) \right] \quad (3)$$

em que, o custo de funcionamento $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}_+$ e o custo final $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_+$ são funções dadas, e $T < \infty$ representa o horizonte finito. A função valor no horizonte finito, é dada por

$$V(s, x) := \inf_{u \in \mathcal{U}_{ad}[s, T]} J(s, x, u). \quad (4)$$

Denota-se (3) por $J(x, u)$, e (4) por $V(x)$ quando tem-se $s = 0$. Com esses elementos, abordamos o ‘problema de controle estocástico’ mediante a formulação fraca de (1), como a minimização de (3) sob (2) e sujeito à dinâmica (1), cf., (Yong and Zhou, 1999, Ch. 2, Sec. 4).

Sob certas circunstâncias relacionadas ao domínio e tempo T , quando são satisfeitas a função valor $V(x)$ é solução da equação de HJB,

$$\mathcal{H}(x, V_x(x), V_{xx}(x)) = 0, \quad (5)$$

em que, V_x e V_{xx} representam o gradiente e a Hessiana de V , respectivamente. O funcional Hamiltoniano $\mathcal{H}$ pode ser escrito explicitamente da seguinte forma

$$\mathcal{H}(x, p, P) = \inf_{u \in \mathbb{U}} \{f(x, u) + \langle p, b(x, u) \rangle + \frac{1}{2} \text{tr}\{P\sigma(x, u)\sigma(x, u)^\top\}, \quad (6)$$

para o qual, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ representa o produto interno em espaços euclidianos e tr é o operador traço.

¹ vide (Karatzas et al., 1997, Sec. 5.3)

3. CONVEXIDADE DA FUNÇÃO CUSTO

Podemos encontrar em vários problemas de programação dinâmica estocástica a função de valor não suave. A literatura tradicional não aborda essa dificuldade. Uma das formas de lidar com esse problema é caracterizar o comportamento assintótico da função valor.

Recentemente, esta questão ganhou importância devido aos seguintes autores do Val and Souto (2017); Pedrosa et al. (2017); do Val and Lévano (2018). Nestes trabalhos, a convexidade da função valor é abordada quando, na dinâmica do sistema, o termo de desvio ou coeficiente *drift* é linear ou semilinear.

Essa negligência, dos autores anteriores, para não lidar com o caso geral, coeficiente *drift* não linear, se deve ao fato de não ter uma ordem estocástica que satisfaça essa demanda. Um resultado prévio na reta pode ser encontrado em Clark and Kiessler (2002). Nesta seção, abordamos o caso da convexidade da função valor sob a dinâmica (1).

Inspirado por (Shaked and Shanthikumar, 2007, Sec. 6.B.1), consideramos o ordenamento estocástico usado neste trabalho.

Definição 1 (Ordem estocástica multivariada). Considere-se X, Y vetores aleatórios n -dimensionais, diz-se que X é menor que Y se e somente se $\mathbf{E}[\phi(X)] \leq \mathbf{E}[\phi(Y)]$ dado uma função crescente $\phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, para o qual existem os valores esperados.

O seguinte resultado fornece condições necessárias e suficientes para a comparação de vetores aleatórios normais multivariados de acordo com a Definição 1.

Lema 2. (Shaked and Shanthikumar, 2007, Th. 7.A.12) Considere-se X, Y vetores normais aleatórios n -dimensionais com média μ_x, μ_y e matriz de variância Σ_x, Σ_y , respectivamente. Então X é menor que Y se e somente se $\mu_x \leq \mu_y$ e $\Sigma_x = \Sigma_y$.

Considere-se o seguinte conjunto de hipóteses nos dados do problema de controle estocástico:

- (A1) $(x, u) \mapsto f(x, u)$ é uma função convexa;
- (A2) $x \mapsto h(x)$ é uma função convexa;
- (A3) $(x, u) \mapsto \sigma(x, u)$ é ‘convexa’ na seguinte forma ($\succeq 0$): para $\theta, \bar{\theta} \succeq 0, \theta + \bar{\theta} = 1$,

$$(\theta\sigma(x, u) + \bar{\theta}\sigma(y, v))(\theta\sigma(x, u) + \bar{\theta}\sigma(y, v))^\top - \sigma(\theta x + \bar{\theta}y, \theta u + \bar{\theta}v)\sigma(\theta x + \bar{\theta}y, \theta u + \bar{\theta}v)^\top \succeq 0. \quad (7)$$

- (A4) Para todo $x \in \mathbb{R}^n$ tal que $x \mapsto b(x, \cdot)$ é uma função convexa ou côncava crescente.

Devemos ter cuidado no item (A4), quando diz-se que a função é convexa crescente significa que a função é convexa crescente em cada componente. Analogamente para a função côncava crescente. Sem perda de generalidade, apresentamos o principal resultado desta seção, assumindo que existe um controle ótimo.

Considere-se $R = [x_1^-, x_1^+] \times [x_2^-, x_2^+] \times \dots \times [x_n^-, x_n^+]$ como um retângulo em $\mathbb{R}^n$. Por exemplo, se $x_i^- = x_i^+$ para todo $i = 1, \dots, n$ então tem-se $R = \emptyset$.

Teorema 3. Sob as hipóteses (A1)–(A4) a função valor em (4) é convexa fora do retângulo R .

Primeiramente, apresenta-se alguns resultados preliminares.

Lema 4. Sob as hipóteses do Teorema 3. Considera-se $t \mapsto x_t, y_t$ dois processos de Itô (1) sem controle e com a mesma condição inicial x . Para algum t em $[s, T]$ fixo, se x_t é menor que y_t , então a seguinte desigualdade é mantida,

$$\mathbf{E}_x \left[\int_s^T f(x_r) dr + h(x_T) \right] \leq \mathbf{E}_x \left[\int_s^T f(y_r) dr + h(y_T) \right], \quad 0 \leq s \leq T.$$

Prova. Pela Definição 1 e sob as hipótese do lema, tem-se que

$$\mathbf{E}_x[f(x_t)] \leq \mathbf{E}_x[f(y_t)], \quad s \leq t < T, \quad (8)$$

$$\mathbf{E}_x[h(x_T)] \leq \mathbf{E}_x[h(y_T)]. \quad (9)$$

Considera-se integrando de (8) sobre $[s, T]$ como uma integral sobre $\mathbb{R} \times \Omega$ sob σ -álgebras finitas, logo aplicando o Teorema de Fubini, para obter a desigualdade da parte comprometida com a integral no lema, e junto com (9) completam o resultado desejado.

Prova.[Prova do Teorema] Nosso objetivo é provar que, para qualquer $x, y \in \mathbb{R}^n$ e $\theta \in [0, 1]$, $\bar{\theta} = 1 - \theta$,

$$V(s, \theta x + \bar{\theta} y) \leq \theta V(s, x) + \bar{\theta} V(s, y)$$

valido para todo s em $[0, T]$. Considera-se a realização dos processos Itô, e dois caminhos distintos associados a dois pontos de partida diferentes,

$$\begin{cases} dx_t = b(x_t)dt + \sigma(x_t)dW_t, & x_s = x \\ dy_t = b(y_t)dt + \sigma(y_t)dW_t, & y_s = y \end{cases} \quad (10)$$

Baseado em (10), considere uma combinação convexa dos caminhos $t \mapsto x_t$ e $t \mapsto y_t$, denota-se como $t \mapsto w_t$,

$$dw_t = (\theta b(x_t) + \bar{\theta} b(y_t)) dt + (\theta \sigma(x_t) + \bar{\theta} \sigma(y_t)) dW_t, \quad (11)$$

com condição inicial $w = \theta x + \bar{\theta} y$. Desde que f e h são funções convexas,

$$f(w_t) \leq \theta f(x_t) + \bar{\theta} f(y_t), \quad s \leq t \leq T, \quad (12)$$

$$h(w_T) \leq \theta h(x_T) + \bar{\theta} h(y_T). \quad (13)$$

Integrando (12) sobre $[s, T]$, e adicionando (13), tem-se

$$\int_s^T f(w_t) dt + h(w_T) \leq \theta \left(\int_s^T f(x_t) dt + h(x_T) \right) + \bar{\theta} \left(\int_s^T f(y_t) dt + h(y_T) \right).$$

Tomando o valor esperado na expressão anterior, tem-se

$$\mathbf{E} \left[\int_s^T f(w_t) dt + h(w_T) \middle| \mathcal{F}_s \right] \leq \theta V(s, x) + \bar{\theta} V(s, y). \quad (14)$$

A prova do Teorema 3 é completada com o seguinte Lema.

Lema 5. Sob as hipóteses do Teorema 3. Se o caminho $t \mapsto z_t$ do processo de Itô homogêneo com condição inicial $z_s = w$, então o processo satisfaz a seguinte desigualdade

$$V(s, w) = \mathbf{E} \left[\int_s^T f(z_t) dt + h(z_T) \middle| \mathcal{F}_s \right] \leq \mathbf{E} \left[\int_s^T f(w_t) dt + h(w_T) \middle| \mathcal{F}_s \right], \quad (15)$$

com w fora do retângulo R .

Prova. Para um limitante inferior de (15) tem-se que considerar o processo de Itô original iniciado em w ,

$$dz_t = b(z_t)dt + \sigma(z_t)dW_t, \quad z_s = w, \quad (16)$$

e comparado com

$$dw_t = (\theta b(x_t) + \bar{\theta} b(y_t)) dt + (\theta \sigma(x_t) + \bar{\theta} \sigma(y_t)) dW_t,$$

definido em (11). Auxiliariamente, considere um quarto processo,

$$d\tilde{w}_t = b(z_t)dt + (\theta \sigma(x_t) + \bar{\theta} \sigma(y_t)) dW_t, \quad \tilde{w}_s = w,$$

para que, $\mathbf{E}[\tilde{w}_t] = \mathbf{E}[z_t]$ e $\text{Var}[\tilde{w}_t] = \text{Var}[w_t]$ para cada $t \in [s, T]$. Aplicando as hipóteses dadas para σ em (7), tem-se

$$\begin{aligned} \text{Var}[\tilde{w}_t] &= \text{Var}[w_t] = \mathbf{E}[(\theta \sigma(x_t) + \bar{\theta} \sigma(y_t))(\bullet)^\top] \succeq \\ &\quad \mathbf{E}[\sigma(w_t)\sigma(w_t)^\top] = \text{Var}[\sigma(w_t)] \end{aligned}$$

e portanto ²,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} (\text{Var}[\tilde{w}_t] - \text{Var}[z_t]) &= \frac{d}{dt} (\text{Var}[w_t] - \text{Var}[z_t]) \\ &\succeq \frac{d}{dt} \mathbf{E}[\sigma(w_t)\sigma(w_t)^\top - \sigma(z_t)\sigma(z_t)^\top], \quad s \leq t \leq T. \end{aligned} \quad (17)$$

Desde que $w_s = z_s = w$, $\text{Var}[w_s] - \text{Var}[z_s] \succeq 0$, e desde a expressão anterior,

$\text{Var}[w_{s+\epsilon}] - \text{Var}[z_{s+\epsilon}] \succeq 0$, para ϵ suficientemente pequeno. (18)

Considere x, y em $\mathbb{R}^n$. A notação $x - y > 0$ significa que em cada componente $x_i - y_i \geq 0$ para todo $i = 1, \dots, n$. Analogamente para $x - y \leq 0$. Sem perda de generalidade, o item (iv) é redefinido de forma conveniente em dois casos.

Case I. Se $x \mapsto b(x)$ é uma função convexo crescente em $x - x^+ > 0$.

Nesta situação

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \mathbf{E}[w_t - z_t] &= \frac{d}{dt} \mathbf{E}[w_t - \tilde{w}_t] = \mathbf{E}[\theta b(x_t) + \bar{\theta} b(y_t) - b(z_t)] \\ &> \mathbf{E}[b(w_t) - b(z_t)]. \end{aligned} \quad (19)$$

Desde que $w_s = z_s = w$, $\mathbf{E}[b(w_s) - b(z_s)] = 0$, e por (19) tem-se que

$\mathbf{E}[w_{s+\epsilon}] - \mathbf{E}[z_{s+\epsilon}] > 0$, para ϵ suficientemente pequeno. (20)

Então de (18) e (20), por aplicação direta da Proposição 2, tem-se que $\mathbf{E}[\varphi(z_{s+\epsilon})] \leq \mathbf{E}[\varphi(w_{s+\epsilon})]$ para alguma função real crescente φ . Portanto z_t é menor que w_t no sentido do ordem crescente convexo para todo t em $[s, T]$.

Caso II: Se $x \mapsto b(x)$ é uma função côncava crescente em $x^- - x > 0$. De forma contrária a (19), tem-se

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \mathbf{E}[w_t - z_t] &= \frac{d}{dt} \mathbf{E}[w_t - \tilde{w}_t] = \mathbf{E}[\theta b(x_t) + \bar{\theta} b(y_t) - b(z_t)] \\ &\leq \mathbf{E}[b(w_t) - b(z_t)]. \end{aligned} \quad (21)$$

Desde que $w_s = z_s = w$, $\mathbf{E}[b(w_s) - b(z_s)] = 0$, e de (21) tem-se

$\mathbf{E}[w_{s+\epsilon}] - \mathbf{E}[z_{s+\epsilon}] \leq 0$, para ϵ suficientemente pequeno. (22)

Então de (18) e (22), por aplicação direta da Proposição 2, tem-se $\mathbf{E}[\vartheta(z_{s+\epsilon})] \leq \mathbf{E}[\vartheta(w_{s+\epsilon})]$ para alguma função real crescente ϑ . Portanto, pelos mesmos argumentos do caso I, z_t é menor que w_t para todo t em $[s, T]$.

² Uma forma simétrica $ABA^\top$ convenientemente, é dada por $AB(\bullet)^\top$.

Claramente $\varphi + \vartheta : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_+$ é uma função crescente fora do retângulo R . Usando a forma contrarecíproca da Definição 1, pode-se concluir que, z_t é menor que w_t fora do retângulo R para todo t em $[s, T]$.

Figura 1. Na Figura no plano, $b(\cdot)$ é côncava crescente sobre $x^- - x \geq 0$ e convexa crescente sobre $x - x^+ \geq 0$. Neste caso, a região R é dada pelo intervalo $[x^-, x^+]$.

Em seguida, apresenta-se um exemplo, em que, o processo de Itô é instável.

Exemplo 6. Considere a equação diferencial estocástica em $\mathbb{R}$ sem controle, tal que

$$dx_t = b(x_t)dt + \sigma(x_t)dW_t, \quad x_0 = x \in \mathbb{R},$$

no qual $b(x_t) = x_t^3$ e $\sigma(x_t) = \sigma$ com $\sigma > 0$. Claramente o coeficiente $b(x_t)$ cumpre com os requisitos do Teorema 3, então tem-se o custo convexo. Por outro lado, é fácil notar que os processos de Itô tendem a explodir conforme transcorre o tempo. Portanto, neste cenário não é possível estudar a estabilidade dos processos ótimos.

Para estudar a estabilidade dos processos ótimos é necessário ter a convexidade da função valor sob uma ordenação estocástica adequada, como se coloca em evidência anteriormente.

Definição 7. Considere-se X, Y vetores aleatórios n - dimensionais. Diz-se que X é menor que Y se e somente se $\mathbf{E}[\phi(X)] \geq \mathbf{E}[\phi(Y)]$ dado uma função decrescente $\phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, para o qual existem os valores esperados.

Considere-se a hipótese alternativa nos dados do problema de controle estocástico:

(A4') Para todo $x \in \mathbb{R}^n$ tal que $x \mapsto b(x, \cdot)$ é uma função convexa ou côncava decrescente.

O teorema seguinte caracteriza, sob algumas condições, a função valor quanto a sua convexidade.

Teorema 8. Sob as hipóteses (A1)–(A4') a função valor em (4) é convexa fora do retângulo R .

Prova. A prova segue de forma análoga à prova do Teorema 3.

A seguir, apresentamos o principal resultado deste trabalho.

4. ESTUDO DA ESTABILIDADE DOS PROCESSOS ÓTIMOS

Nesta seção discute-se a estabilidade dos processos de Itô controlados sob os critérios expostos em Meyn and Tweedie (1993) na formulação fraca. O abordagem usado

Figura 2. Na Figura no plano, $b(\cdot)$ é convexo decrescente sobre $x^- - x \geq 0$ e côncavo decrescente sobre $x - x^+ \geq 0$. A região R é dada pelo intervalo $[x^-, x^+]$.

para a estabilidade dos processos é formulado pela recorrência do processo. Assim, diz-se que um processo é instável quando ele não volta ao conjunto limitado de tamanho razoável que contém o ponto inicial, neste caso $\mathcal{O} \ni 0$. No caso que o processo retorne ao conjunto dado um número finito de vezes, se diz-se que o processo é estável. Em termos da estabilidade estuda-se a recorrência do conjunto que contém a origem.

Para um conjunto mensurável $\mathcal{O} \subset \mathcal{D}$, considera-se o $\mathcal{F}_t$ -tempo de parada

$$\tau_{\mathcal{O}} = \inf\{t > 0 : x_t \in \mathcal{O}\},$$

com $\tau_{\mathcal{O}} = +\infty$ quando as trajetórias não atingem o conjunto $\mathcal{O}$.

Definição 9 (Função tipo norma). Uma função $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_+$ é dita função tipo norma se $f(x) \rightarrow +\infty$ quando $\|x\| \rightarrow +\infty$.

Definição 10 (Função de Lyapunov). Uma função $V : \mathcal{D} \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ é dita função de Lyapunov se V é uma função tipo norma, $V \in D(\mathcal{A})$ e $AV(x) < 0$ em $\mathcal{D} \setminus \mathcal{O}$, tal que, $0 \in \mathcal{O}$.

Na Definição 10, $\mathcal{A}$ e $D(\mathcal{A})$ representam o gerador estendido e o domínio de este, respectivamente, vide do Val and Lévano (2018).

Definição 11. Um conjunto $\mathcal{O}$ é dito recorrente positivo se $\sup_{x \in \mathcal{D}} \mathbf{E}_x[\tau_{\mathcal{O}}] < +\infty$.

O seguinte resultado foi extraído de Meyn and Tweedie (1993).

Lema 12 (Condição para recorrência positiva). Suponha que $\mathcal{O} \subset \mathcal{D}$. Para alguma função $f(\cdot) > 0$, $c, d > 0$ e $V \in D(\mathcal{A})$,

$$AV(x) \leq -cf(x) + d1_{\mathcal{O}}, \quad x \in \mathcal{D},$$

será válida para V função tipo norma em $\mathcal{D} \setminus \mathcal{O}$. Então o processo $t \mapsto x_t$ é recorrente positivo.

Para estudar a estabilidade dos processos de Itô assume-se que:

- (B1) existe uma solução não suave de (5);
- (B2) a convexidade da função valor sob as condições do Teorema 8;
- (B3) existe $u_t^* \in \mathcal{U}$ que minimiza (4).

Teorema 13. Sob as hipóteses (B1)–(B3). Suponha que (x_t^*, u_t^*) é um par ótimo no problema. Se o custo de funcionamento $f > 0$ e $V(x)$ dado em (4) é uma função convexa sobre $\mathbb{R}^n \setminus \mathcal{O}$ então o processo $t \mapsto x_t$ é recorrente positivo.

Prova. Tendo-se em conta o gerador estendido desenvolvido detalhadamente em do Val and Lévano (2018), tem-se a seguinte relação para o Hamiltoniano em (5),

$$\mathcal{H}(x, p, P) = 0 \equiv \mathcal{A}v(x) = -f(x), \quad x \in \mathbb{R}^n \setminus \mathcal{O}.$$

Como a função f é tipo norma, então a condição para recorrência positiva é verificada.

5. CONCLUSÃO

No problema de controle estocástico uma função de custo convexa não garante a estabilidade dos processos ótimos, como acontece no contexto determinístico segundo a otimização convexa. Mas isto não significa uma contradição. É importante dizer de forma parcial que, quando se tem uma escolha adequada de um ordenamento estocástico, é possível obter convexidade da função valor e estabilidade. Este trabalho apresenta uma contribuição sobre a convexidade da função valor sob uma adequada escolha de um ordenamento estocástico para o estudo da estabilidade, sob algum critério na literatura, dos processos de Itô.

AGRADECIMENTOS

Agradecemos à agência CAPES que através do programa PNPD/CAPES pelo suporte financeiro no programa de pós-graduação na Faculdade de Engenharia Elétrica da Universidade Tecnológica Federal do Paraná.

REFERÊNCIAS

- Åström, K.J. (2012). *Introduction to stochastic control theory*. Courier Corporation.
- Boyd, S. and Vandenberghe, L. (2004). *Convex optimization*. Cambridge university press.
- Clark, S.P. and Kiessler, P.C. (2002). On the convexity of value functions for a certain class of stochastic dynamic programming problem. *Stochastic Analysis and Applications*, (20), 783–789.
- do Val, J.B.R. and Lévano, E. (2018). An extended generator for degenerate time-homogeneous diffusion processes and almost sure stability. *Submitted to the SIAM J. Control Optim editors on December 11, 2018*.
- do Val, J.B.R. and Souto, R.F. (2017). Modeling and control of stochastic systems with poorly known dynamics. *IEEE T. Automat. Contr.*, 62(9), 4467–4482.
- Fleming, W.H. and Soner, H.M. (2006). *Controlled Markov Processes and Viscosity Solutions*. Springer-Verlag, 2nd edition.
- Karatzas, I., Lehoczky, J.P., Sethi, S.P., and Shreve, S.E. (1997). Explicit solution of a general consumption/investment problem. In *Optimal Consumption and Investment with Bankruptcy*, 21–56. Springer.
- Meyn, S.P. and Tweedie, R.L. (1993). Stability of markovian processes iii: Foster-lyapunov criteria for continuous-time processes. *Advances in Applied Probability*, 25(3), 518–548.
- Pedrosa, F.C., Nereu, J.C., and do Val, J.B.R. (2017). Stochastic optimal control of systems for which control variation increases uncertainty: A contribution to the discrete time case. In *2017 IEEE International Conference on Systems, Man, and Cybernetics (SMC)*, 2279–2284. IEEE.

- Shaked, M. and Shanthikumar, G. (2007). *Stochastic Orders*. Springer-Verlag.
- Yong, J. and Zhou, X.Y. (1999). *Stochastic Controls: Hamiltonian Systems and HJB Equations*. Springer-Verlag, 1st edition.