Identificação Inversa Recursiva Multivariável Baseada em Modelo Nebuloso de Realização Mínima no Espaço de Estados com Observador de Kalman

Adriano Mendes Magalhães *
Ginalber Luiz de Oliveira Serra **

* *Universidade Federal do Maranhão, Av. do Português, Vila Bacanga,
s.n., São Luís, MA, Brasil (e-mail:
adriano.mendes.magalhaes@gmail.com)*

** *Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Maranhão,
Av. Getúlio Vargas, Monte Castelo, s.n., São Luís, MA, Brasil
(e-mail: ginalber@ifma.edu.br)*

Abstract: In this paper, a methodology for inverse fuzzy modeling of multivariable nonlinear dynamic systems, by direct approach, with state space minimal realization, from experimental data, is proposed. The adopted methodology consists of a formulation for online parametric estimation of the inverse fuzzy model, based on the fuzzy and recursive version of the Observer/Kalman Identification algorithm, using the approach of the Gustafson-Kessel fuzzy clustering algorithm. The analysis of the experimental results related to the recursive identification of Helicopter 2DoF illustrate the efficiency and applicability of the adopted methodology.

Resumo: Neste artigo, uma metodologia para modelagem nebulosa inversa de sistemas não lineares multivariáveis, pela abordagem direta, de realização mínima no espaço de estados, a partir de dados experimentais é proposta. A metodologia adotada consiste numa formulação para estimação paramétrica *online* do modelo nebuloso inverso, baseada na versão nebulosa e recursiva do algoritmo OKID (*Observer/Kalman Identification*), usando-se a abordagem do algoritmo de agrupamento nebuloso Gustafson-Kessel. A análise dos resultados experimentais relacionados à identificação recursiva de um Helicóptero 2DoF ilustram a eficiência e aplicabilidade da metodologia adotada.

Keywords: System inverse identification; multivariable dynamic systems; Kalman observer; minimal realization; fuzzy inference system.

Palavras-chaves: Identificação inversa de sistemas; sistemas dinâmicos multivariáveis; observador de Kalman; realização mínima; sistema de inferência nebuloso.

1. INTRODUÇÃO

Para identificação inversa de sistemas dinâmicos, destacam-se três abordagens principais: abordagem direta (contexto de estudo neste artigo), abordagem indireta e aprendizagem especializada (Sousa and Kaymak, 2002; Jung and Enqvist, 2013). Na abordagem direta, o modelo inverso é obtido em uma só etapa, através dos dados de saída e entrada do sistema dinâmico a ser identificado. Alinhado a isso, a combinação da teoria de modelagem inversa com técnicas de inteligência computacional, especificamente sistemas nebulosos, tem apresentado resultados promissores (Lee and Liu, 2014; Lai et al., 2017; Rahbari et al., 2018). Em Boukezzoula et al. (2003), uma metodologia de inversão de modelo nebuloso Takagi-Sugeno é proposta como estratégia de controle baseado em modelo interno de sistemas não lineares. Em Sun et al. (2009), um algoritmo que reúne as técnicas de SVM (do inglês *Support Vector Machine*) com mínimos quadrados e agrupamento nebuloso *c-means* é proposto para a identificação de sistemas

dinâmicos baseada em modelos não lineares inversos. Além disso, para a identificação de sistemas não lineares MIMO (do inglês *Multiple Input and Multiple Output*) baseada em modelos nebulosos inversos, a teoria do espaço de estados se torna particularmente atrativa (Nelles, 2001; Aguirre, 2015). A propriedade de compensação paralela distribuída, inerente à teoria de sistemas nebulosos, permite que a proposição consequente seja representada por modelos lineares e invariantes com o tempo, realizando o mapeamento dinâmico inverso associado, respectivamente, a pontos de operação do sistema dinâmico a ser identificado, de modo que os modelos no espaço de estados sejam estabelecidos. Assim, neste artigo, é proposta uma metodologia para modelagem inversa de sistemas não lineares multivariáveis a partir de dados experimentais, pela abordagem direta, baseada em modelo nebuloso de realização mínima com estrutura Takagi-Sugeno, no espaço de estados.

A originalidade da metodologia proposta consiste na formulação para estimação paramétrica do modelo nebuloso inverso, a qual é baseada na versão nebulosa e recursiva

do algoritmo OKID (*Observer/Kalman Identification*) em função do algoritmo de agrupamento nebuloso Gustafsson-Kessel (Babuška, 1998), visando-se os seguintes aspectos de interesse:

- Janelamento de dados para implementação iterativa do algoritmo de agrupamento nebuloso Gustafsson-Kessel;
- Estimacão paramétrica no espaço de estados, baseada na versão nebulosa e recursiva do algoritmo OKID;
- Estimacão de estados nebulosos no contexto do mapeamento inversos de sistemas dinâmicos não lineares.

2. METODOLOGIA

A metodologia adotada consiste na formulação matemática para identificação nebulosa inversa multivariável, no contexto do espaço de estados, usando-se a abordagem direta, a partir dos dados experimentais de entrada e saída.

Seja um sistema MIMO não linear de r entradas $\mathbf{u} = [u_1, \dots, u_r]^T \in \mathbb{R}^{r \times 1}$ e m saídas $\mathbf{y} = [y_1, \dots, y_m]^T \in \mathbb{R}^{m \times 1}$. Define-se a amostra do conjunto de dados do vetor $\mathbf{z}_{yu} \in \mathbb{R}^{(m+r) \times 1}$ tal que $\mathbf{z}_{yu} \triangleq [\mathbf{y}^T, \mathbf{u}^T]^T \in \mathbb{R}^{(m+r) \times 1}$. A priori, seja $\mathbf{u} = \mathbf{u}(k)$, $\mathbf{y} = \mathbf{y}(k)$ e $\mathbf{z}_{yu} = \mathbf{z}_{yu}(k)$. Define-se a janela de dados deslizante sobre o tempo, como sendo a matriz $\mathbf{Z}_{yu}(k) \in \mathbb{R}^{(m+r) \times l}$, referente ao mapeamento da saída $\mathbf{y}$ para entrada $\mathbf{u}$, tal que:

$$\mathbf{Z}_{yu}(k) = [\mathbf{z}_{yu}(k-l+1) \cdots \mathbf{z}_{yu}(k)] \quad (1)$$

$\forall k \in \mathbb{Z}_+^* k \geq l$, onde l é o número de amostras de um conjunto de dados iniciais. Assim se $k = l$, então tem-se $\mathbf{Z}_{yu}(l)$.

Define-se a base de regras, referente à classe de modelo nebuloso inverso adotada, dada por:

$$\begin{aligned} R^i: & \text{SE } \tilde{\mathbf{y}}(k) \text{ é } \mathcal{Y}_{yu}^i(k) \text{ E } \tilde{\mathbf{u}}(k) \text{ é } \mathcal{Z}_{yu}^i(k) \\ \text{ENTÃO } & \begin{cases} \hat{\mathbf{u}}^i(k) = \hat{\mathbf{\Gamma}}^i(k) \hat{\mathbf{x}}_{yu}^i(k) + \hat{\mathbf{\Delta}}^i(k) \mathbf{y}(k) \\ \hat{\mathbf{x}}_{yu}^i(k+1) = \hat{\mathbf{G}}^i(k) \hat{\mathbf{x}}_{yu}^i(k) + \hat{\mathbf{H}}^i(k) \mathbf{y}(k) \\ \quad - \hat{\mathbf{O}}^i(k) [\mathbf{u}(k) - \hat{\mathbf{u}}^i(k)] \end{cases} \end{aligned} \quad (2)$$

onde $i \in \{1, \dots, c\} \subset \mathbb{Z}_+^*$ é o índice da regra, do agrupamento ou do ponto de operação; $c \in \mathbb{Z}_+^*$, $c > 1$ é o número de regras da base de regras. Os vetores $\hat{\mathbf{x}}_{yu}^i(k+1) \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ e $\hat{\mathbf{u}}^i(k) \in \mathbb{R}^{r \times 1}$ definem respectivamente a equação de estados estimados e a equação de saídas estimadas do submodelo local (correspondente às entradas do sistema dinâmico real), cujos parâmetros $\hat{\mathbf{G}}^i \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\hat{\mathbf{H}}^i \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $\hat{\mathbf{O}}^i \in \mathbb{R}^{n \times r}$, $\hat{\mathbf{\Gamma}}^i \in \mathbb{R}^{r \times n}$ e $\hat{\mathbf{\Delta}}^i \in \mathbb{R}^{r \times m}$ são a matriz dinâmica ou matriz de estados, a matriz de entradas, a matriz do observador de estados, a matriz de saídas e matriz de transição direta, respectivamente.

Na proposição antecedente da base de regras, $\tilde{\mathbf{u}}(k)$ e $\tilde{\mathbf{y}}(k)$ são variáveis linguísticas das entradas e saídas, respectivamente, e $\mathcal{Y}_{yu}^i(k)$ e $\mathcal{Z}_{yu}^i(k)$ são seus respectivos valores ou

termos linguísticos, os quais são obtidos para cada ponto de operação ou regra i , e matematicamente são definidos por conjuntos nebulosos, cujos graus de pertinência são tais que $\mu_{\mathcal{Y}_{yu}^i(k)}(k) \triangleq \mu_{\mathcal{Y}_{yu}^i(k)}(\mathbf{y}(k)) : \mathbb{R}^{m \times 1} \mapsto (0, 1] \subset \mathbb{R}$ e $\mu_{\mathcal{Z}_{yu}^i(k)}(k) \triangleq \mu_{\mathcal{Z}_{yu}^i(k)}(\mathbf{u}(k)) : \mathbb{R}^{r \times 1} \mapsto (0, 1] \subset \mathbb{R}$. O grau de ativação normalizado da i -ésima regra $\gamma_{yu}^i(k) \in (0, 1] \subset \mathbb{R}$, é dado por:

$$\gamma_{yu}^i(k) \triangleq \frac{\beta_{yu}^i(k)}{\sum_{i=1}^c \beta_{yu}^i(k)} \quad (3)$$

onde $\beta_{yu}^i(k) \in (0, 1] \subset \mathbb{R}$ é o grau de ativação da i -ésima regra na k -ésima amostra de dados. Na proposição consequente da base de regras, em cada ponto de operação i , um submodelo local inverso, no contexto do espaço de estados, com o ganho do observador de Kalman é estimado.

Como mecanismo ou máquina de inferência, inerente ao modelo nebuloso Takagi-Sugeno, definem-se o estado estimado nebuloso e a entrada estimada nebulosa do sistema como sendo os vetores $\tilde{\mathbf{x}}_{yu} = \tilde{\mathbf{x}}_{yu}(k) \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ e $\tilde{\mathbf{u}} = \tilde{\mathbf{u}}(k) \in \mathbb{R}^{r \times 1}$, tais que

$$\tilde{\mathbf{u}} = \tilde{\mathbf{u}}(k) \triangleq \sum_{i=1}^c \gamma_{yu}^i(k) \hat{\mathbf{u}}^i(k) \quad (4)$$

$$\tilde{\mathbf{x}}_{yu} = \tilde{\mathbf{x}}_{yu}(k) \triangleq \sum_{i=1}^c \gamma_{yu}^i(k) \hat{\mathbf{x}}_{yu}^i(k) \quad (5)$$

2.1 Estimacão Paramétrica do Antecedente

Na proposição antecedente, o grau de ativação normalizado $\gamma_{yu}^i(k)$ da i -ésima regra é o parâmetro a ser estimado para cada amostra de dados experimentais. Para isso, pode-se, por exemplo, executar o algoritmo de agrupamento de Gustafsson-Kessel (GK) (Babuška et al., 2002) sobre uma janela (batelada) fixa de dados $\mathbf{Z}_{yu}(l)$, e obter o $\gamma_{yu}^i(k) \forall k \in [1, l]$, por aplicar a metodologia de projeção e extensão cilíndrica diretamente sobre os conjuntos nebulosos dos agrupamentos resultantes, conforme é proposto em (Magalhães and Serra, 2018). Porém nesse artigo, propõe-se obter o $\gamma_{yu}^i(k)$ diretamente da matriz correspondente à partição nebulosa dos agrupamentos, a partir da execução do algoritmo GK sobre a janela temporal de dados $\mathbf{Z}_{yu}(k)$ de (1), para todo $k \geq l$.

O algoritmo de agrupamento GK é definido de acordo com um procedimento iterativo de otimização da seguinte função custo (Babuška et al., 2002):

$$J(\mathbf{Z}; \mathfrak{M}, \mathfrak{C}, \{\mathfrak{R}^i\}) = \sum_{i=1}^c \sum_{\xi=1}^k (\mu_{i\xi})^e \mathcal{D}_{i\xi}^2 \mathfrak{R}^i \quad (6)$$

onde $\mathbf{Z} \in \mathbb{R}^{c \times k}$ é a base de dados, dos quais serão agrupados; $\{c, \varsigma, k, \varrho\} \in \mathbb{Z}_+^*$ são respectivamente o número de agrupamentos, o número de observações (linhas), o número de amostras (colunas) da base de dados e o

expoente de ponderação que determina a nebulosidade dos agrupamentos resultantes, respectivamente. A matriz $\mathfrak{M} \in \mathbb{R}^{c \times k}$ corresponde à partição nebulosa com os graus de pertinência das amostras de dados em relação aos núcleos ou centros dos agrupamentos $\mathbf{c}_i^{(\ell)} \in \mathbb{R}^{s \times 1}$, dados por (Babuška, 1998):

$$\mathbf{c}_i^{(\ell)} = \frac{\sum_{\xi=1}^k \left(\mu_{i\xi}^{(\ell-1)} \right)^e \mathbf{z}(\xi)}{\sum_{\xi=1}^k \left(\mu_{i\xi}^{(\ell-1)} \right)^e} \quad (7)$$

onde ℓ é o índice do processo iterativo de otimização. O termo $\mathcal{D}_{i\xi}^2$ é a distância quadrática de Mahalanobis entre a ξ -ésima amostra de $\mathbf{Z}$ e o i -ésimo centro de agrupamento $\mathbf{c}_i$, de acordo com matriz de norma induzida $\mathfrak{R}^i \in \mathbb{R}^{s \times s}$, dada por (Babuška, 1998):

$$\mathfrak{R}^i = [\nu_i \det(\mathbf{F}^i)]^{1/\eta} (\mathbf{F}^i)^{-1} \quad (8)$$

$$\mathcal{D}_{i\xi}^2 = (\mathbf{z}(\xi) - \mathbf{c}_i^{(\ell)})^T \mathfrak{R}^i (\mathbf{z}(\xi) - \mathbf{c}_i^{(\ell)}) \quad (9)$$

onde $\nu_i \in \mathbb{R}$ é o i -ésimo valor do volume (constante) do agrupamento e $\mathbf{z}(\xi) \in \mathbb{R}^{s \times 1}$ é o vetor da ξ -ésima amostra de dados de $\mathbf{Z}$. A matriz $\mathbf{F}^i$ corresponde à covariância nebulosa referente ao i -ésimo agrupamento, definida por (Babuška, 1998):

$$\mathbf{F}^i = \frac{\sum_{\xi=1}^k \left(\mu_{i\xi}^{(\ell-1)} \right)^e (\mathbf{z}(\xi) - \mathbf{c}_i^{(\ell)}) (\mathbf{z}(\xi) - \mathbf{c}_i^{(\ell)})^T}{\sum_{\xi=1}^k \left(\mu_{i\xi}^{(\ell-1)} \right)^e} \quad (10)$$

a qual é simétrica, semipositiva e não singular (Aguirre, 2015).

A partir de (7) a (10), as L iterações do processo de otimização são executadas até alcançar uma tolerância mínima $\vartheta \in \mathbb{R}_+$ do erro absoluto entre os elementos da matriz de partição nebulosa $\mathfrak{M}$, em um valor de iteração do ponto ótimo $\ell = \ell^*$. Essa matriz $\mathfrak{M}$ pode matematicamente ser definida como:

$$\mathfrak{M} = [\mu_{i\xi}]_{c \times N} \triangleq \begin{bmatrix} \mu_{11} & \cdots & \mu_{1\xi} & \cdots & \mu_{1N} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mu_{i1} & \cdots & \mu_{i\xi} & \cdots & \mu_{iN} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mu_{c1} & \cdots & \mu_{c\xi} & \cdots & \mu_{cN} \end{bmatrix} \quad (11)$$

com $\mu_{i\xi} \in (0, 1] \subset \mathbb{R}$ sendo o grau de pertinência, o qual informa quanto cada amostra de dados ξ pertence ao agrupamento i , tal que

$$\mu_{i\xi} = \mu_{i\xi}^{(\ell^*)} = \frac{1}{\sum_{j=1}^c \left(\frac{\mathcal{D}_{i\xi}^2}{\mathcal{D}_{j\xi}^2} \right)^{1/(e-1)}} \quad (12)$$

Por fim, fazendo-se $\mathbf{Z} = \mathbf{Z}_{yu}(k)$, tem-se $s = m + r$, e:

$$\gamma_{yu}^i(k) = \mu_{ik}^{(\ell^*)} \quad (13)$$

2.2 Estimação Paramétrica da Proposição Consequente

Na proposição consequente da base de regras, conforme em (2), as matrizes $\widehat{\mathbf{G}}^i(k)$, $\widehat{\mathbf{H}}^i(k)$, $\widehat{\mathbf{O}}^i(k)$, $\widehat{\mathbf{F}}^i(k)$, $\widehat{\mathbf{\Delta}}^i(k)$ são os parâmetros a serem estimados por meio de uma versão nebulosa e recursiva do algoritmo OKID.

2.2.1 Estimação dos parâmetros de Markov na etapa recursiva

Na etapa recursiva, o i -ésimo submodelo local inverso é desenvolvido no sentido dos mínimos quadrados ponderados recursivos com compensação paramétrica, dado por:

$$\boldsymbol{\eta}^i(k - \tau) = \mathbf{u}(k - \tau) - \widehat{\mathbf{Y}}_{yu}^i[k - (\tau + 1)] \mathbf{v}_{yu}[k - (\tau + 1)] \quad (14)$$

$$\boldsymbol{\Xi}_{yu}^i[k - (\tau + 1)] = \{\mathbf{v}_{yu}[k - (\tau + 1)]\}^T \mathbf{P}_{yu}^i[k - (\tau + 2)] \quad (15)$$

$$\mathbf{K}_{yu}^i[k - (\tau + 1)] = \frac{\boldsymbol{\Xi}_{yu}^i[k - (\tau + 1)]}{[\gamma_{yu}^i(k - \tau)]^{-1} + \boldsymbol{\Xi}_{yu}^i[k - (\tau + 1)] \mathbf{v}_{yu}[k - (\tau + 1)]} \quad (16)$$

$$\mathbf{P}_{yu}^i[k - (\tau + 1)] = \mathbf{P}_{yu}^i[k - (\tau + 2)] \left\{ \mathbf{I}_{\mathbf{P}_{yu}^i} - \mathbf{v}_{yu}[k - (\tau + 1)] \mathbf{K}_{yu}^i[k - (\tau + 1)] \right\} \quad (17)$$

$$\widehat{\mathbf{Y}}_{yu}^i(k) = [1 - f_T] \widehat{\mathbf{Y}}_{yu}^i(k - 1) + f_T \left\{ \widehat{\mathbf{Y}}_{yu}^i[k - (\tau + 1)] + \boldsymbol{\eta}^i(k - \tau) \mathbf{K}_{yu}^i[k - (\tau + 1)] \right\} \quad (18)$$

onde $f_T = 1/T_f \in \mathbb{R}_+$. Os outros parâmetros de (14) a (18) são descritos como segue: $q \in \mathbb{Z}_+^*$ é o parâmetro de predição associado aos estados; $T_f \in \mathbb{Z}_+^*$ é a constante de suavização exponencial, $\tau \in \mathbb{Z}_+^*$ é a constante de atualização paramétrica descorrelacionada, definida como $\tau \triangleq n_{min}$, $\boldsymbol{\eta}^i(k) \in \mathbb{R}^{r \times 1}$ é o vetor inovação, $\mathbf{K}_{yu}^i(k - 1) \in \mathbb{R}^{1 \times [m+q(m+r)]}$ é o vetor ganho de inovação; $\mathbf{P}_{yu}^i(k - 1) \in \mathbb{R}^{[m+q(m+r)] \times [m+q(m+r)]}$ é a matriz de covariância de estimação recursiva dos parâmetros de Markov, $\mathbf{I}_{\mathbf{P}_{yu}^i} \in \mathbb{R}^{[m+q(m+r)] \times [m+q(m+r)]}$ é a matriz identidade associada a $\mathbf{P}_{yu}^i(k - 1)$ (Aguirre, 2015).

2.2.2 Algoritmo de realização de autossistemas (ERA)

A partir dos parâmetros de Markov estimados $\widehat{\mathbf{Y}}_{yu}^i(k)$, a estimação de cada submodelo local inverso, referente a regra i , é obtida pelo algoritmo de realização de autossistemas, ou simplesmente ERA (do inglês *Eigensystems Realization Algorithm*) (Juang, 1994; Chen, 1999), a fim de estimar submodelos de realização mínima de ordem reduzida na forma canônica do observador Wu et al. (2015), os quais são necessários para o mapeamento inverso do sistema dinâmico em cada ponto de operação. Assim, a matriz de Hankel, em função dos parâmetros de Markov, é dada por:

$$\mathbf{H}_{yu}^i(\kappa - 2) \triangleq \begin{bmatrix} (\widehat{\mathbf{Y}}_{yu}^i)_{\kappa} & (\widehat{\mathbf{Y}}_{yu}^i)_{\kappa+1} & \cdots & (\widehat{\mathbf{Y}}_{yu}^i)_{\kappa+g-1} \\ (\widehat{\mathbf{Y}}_{yu}^i)_{\kappa+1} & (\widehat{\mathbf{Y}}_{yu}^i)_{\kappa+2} & \cdots & (\widehat{\mathbf{Y}}_{yu}^i)_{\kappa+g} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (\widehat{\mathbf{Y}}_{yu}^i)_{\kappa+p-2} & (\widehat{\mathbf{Y}}_{yu}^i)_{\kappa+p-1} & \cdots & (\widehat{\mathbf{Y}}_{yu}^i)_{\kappa+p+g-3} \\ (\widehat{\mathbf{Y}}_{yu}^i)_{\kappa+p-1} & (\widehat{\mathbf{Y}}_{yu}^i)_{\kappa+p} & \cdots & (\widehat{\mathbf{Y}}_{yu}^i)_{\kappa+p+g-2} \end{bmatrix} \quad (19)$$

$\forall \kappa \geq 2$, onde $\mathbf{H}_{yu}^i(\kappa - 2) \in \mathbb{R}^{pr \times g(m+r)}$, e $p \geq 0$ e $g \geq 0$ são as constantes de observabilidade e controlabilidade, respectivamente, ambas inteiras e arbitrárias. Observa-se que $pr < g(m+r)$ e $p \geq q$ são condições necessárias para executar o ERA via matriz de Hankel (Juang, 1994; Wu et al., 2015). Logo, calcula-se $\mathbf{H}_{yu}^i(0)$ e $\mathbf{H}_{yu}^i(1)$, e em seguida realiza-se a operação de decomposição de valores singulares sobre $\mathbf{H}_{yu}^i(0)$, para obter a definição da ordem de realização mínima reduzida n_{min} . Porém, dentre os n valores singulares de $\mathbf{H}_{yu}^i(0)$, os $n - n_{min}$ valores singulares não significativos são aqueles relativamente pequenos, por conterem mais informações ruidosas do que do sistema (Juang, 1994; Wu et al., 2015). Assim, define-se um valor de $n_{min} \leq n$ de tal forma que exclua tais valores singulares não significativos para todos os c submodelos locais inversos.

Uma vez definido o valor de n_{min} , realiza-se a estimação paramétrica via $\mathbf{H}_{yu}^i(0)$ e $\mathbf{H}_{yu}^i(1)$. A priori, define-se as seguintes matrizes seletoras:

$$\mathbf{E}_r \triangleq \begin{bmatrix} \mathbf{I}_r \\ \mathbf{0}_{(p-1)r \times r} \end{bmatrix} \quad (20)$$

$$\mathbf{E}_{n_{min}} \triangleq \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{n_{min}} \\ \mathbf{0}_{(pr-n_{min}) \times n_{min}} \end{bmatrix} \quad (21)$$

$$\mathbf{E}_{m+r} \triangleq \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{m+r} \\ \mathbf{0}_{(g-1)(m+r) \times (m+r)} \end{bmatrix} \quad (22)$$

tal que $\mathbf{E}_r \in \mathbb{R}^{pr \times r}$, $\mathbf{E}_{n_{min}} \in \mathbb{R}^{pr \times n_{min}}$, $\mathbf{E}_{m+r} \in \mathbb{R}^{g(m+r) \times (m+r)}$. $\mathbf{I}_r \in \mathbb{R}^{r \times r}$, $\mathbf{I}_{n_{min}} \in \mathbb{R}^{n_{min} \times n_{min}}$ e $\mathbf{I}_{m+r} \in \mathbb{R}^{(m+r) \times (m+r)}$ são matrizes identidade, enquanto que $\mathbf{0}_{(p-1)r \times r} \in \mathbb{R}^{(p-1)r \times r}$, $\mathbf{0}_{(pr-n_{min}) \times n_{min}} \in \mathbb{R}^{(pr-n_{min}) \times n_{min}}$ e $\mathbf{0}_{(g-1)(m+r) \times (m+r)} \in \mathbb{R}^{(g-1)(m+r) \times (m+r)}$ são matrizes de zeros. Assim, os parâmetros $\widehat{\mathbf{G}}^i$, $\widehat{\mathbf{H}}^i$, $\widehat{\mathbf{O}}^i$, $\widehat{\mathbf{\Gamma}}^i$ e $\widehat{\mathbf{\Delta}}^i$ podem ser estimados da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \widehat{\mathbf{G}}^i &= \mathbf{E}_{n_{min}}^T \mathbf{H}_{yu}^i(1) \\ &\cdot \left(\left[\mathbf{E}_{n_{min}}^T \mathbf{H}_{yu}^i(0) \right]^T \right. \\ &\cdot \left. \left\{ \mathbf{E}_{n_{min}}^T \mathbf{H}_{yu}^i(0) \left[\mathbf{E}_{n_{min}}^T \mathbf{H}_{yu}^i(0) \right]^T \right\}^{-1} \right) \end{aligned} \quad (23)$$

$$\left[\widehat{\mathbf{H}}^i, \widehat{\mathbf{O}}^i \right] = \mathbf{E}_{n_{min}}^T \mathbf{H}_{yu}^i(0) \mathbf{E}_{m+r} \quad (24)$$

$$\widehat{\mathbf{H}}^i = \text{as primeiras } m \text{ colunas de } \left[\widehat{\mathbf{H}}^i, \widehat{\mathbf{O}}^i \right]. \quad (25)$$

$$\widehat{\mathbf{O}}^i = \text{as últimas } r \text{ colunas de } \left[\widehat{\mathbf{H}}^i, \widehat{\mathbf{O}}^i \right]. \quad (26)$$

$$\widehat{\mathbf{\Gamma}}^i = \mathbf{E}_r^T \mathbf{E}_{n_{min}} \quad (27)$$

$$\widehat{\mathbf{\Delta}}^i = \text{as primeiras } m \text{ colunas de } \widehat{\mathbf{Y}}_{yu}^i(k). \quad (28)$$

3. RESULTADOS EXPERIMENTAIS

Para demonstrar a aplicabilidade da metodologia proposta, os resultados experimentais da identificação nebulosa inversa de um helicóptero com dois graus de liberdade (do inglês *Helicopter with 2 Degrees Of Freedom - H2DOF*) (Filho and de Oliveira Serra, 2017; Pires and Serra, 2018; Filho and de Oliveira Serra, 2018), são apresentados. O vetor de entradas do Helicóptero 2DOF, é definido como $\mathbf{u} = [u_1, u_2]^T \triangleq [V_\theta, V_\psi]^T$, com $V_\theta \in [-24, 24] \subset \mathbb{R}_+$ e $V_\psi \in [-15, 15] \subset \mathbb{R}_+$ são níveis de tensão CC dos motores que proporcionam o torque nos eixos de elevação e azimute, dados em volts (V) respectivamente, e o vetor de saídas é definido como $\mathbf{y} = [y_1, y_2]^T \triangleq [\theta, \psi]^T$, com $\theta \in [-40, 5, 40, 5] \subset \mathbb{R}_+$ e $\psi \in [0, 360] \subset \mathbb{R}_+$ sendo as posições angulares de elevação e azimute, dados em graus ($^\circ$), respectivamente. O Helicóptero 2DOF, em malha aberta, não atende ao critério de BIBO estabilidade. Assim, foram utilizados 1096 pontos como conjunto de dados, em malha aberta, amostrados a cada $T_s = 3 \cdot 10^{-3}$ (s), com sinais pseudoaleatórios aplicados às entradas, de tal forma que os sinais das saídas não ultrapassem seus respectivos intervalos de operação. Além disso, desse conjunto de dados, foram separados os $l = 365$ primeiros pontos para serem utilizados como estimação inicial em batelada; já os 731 pontos restantes foram usados para a etapa de estimação recursiva.

O modelo nebuloso inverso, descrito na metodologia, foi definido com $c = 3$ regras. Para estimação da proposição antecedente, definiu-se os seguintes parâmetros de configuração do algoritmo GK: expoente de ponderação dos agrupamentos $\varrho = 2$; tolerância de terminação das iterações de otimização $\vartheta = 10^{-3}$; número de iterações de otimização $L = 100$; volume do i -ésimo agrupamento $\nu_i = 1$, para todo $i \in [1, c]$. Referente a i -ésima matriz de covariância $\mathbf{F}^i$, definiu-se os seguintes parâmetros: limite do número condicional $\alpha = 10^{15}$ e o parâmetro de ponderação $\varsigma = 0,5$. Já para a estimação recursiva

por meio da versão nebulosa do algoritmo OKID, definiu-se os seguintes parâmetros de configuração: constante de predição associado com os estados $q = 1$; constante de observabilidade $p = 10$, e constante de controlabilidade $g = 5$, ambas associadas às matrizes de Hankel $\mathcal{H}_{yu}^i(0)$ e $\mathcal{H}_{yu}^i(1)$; a constante de suavização exponencial $T_f = 40$ e a ordem de realização mínima reduzida $n_{min} = 2$. De acordo com a metodologia adotada, o modelo nebuloso inverso foi obtido, experimentalmente, a partir de duas etapas. Na primeira etapa, utilizou-se um conjunto de dados para estimação inicial, em batelada, das matrizes $\bar{\mathbf{Y}}_{yu}^i(k)$, dos parâmetros $\hat{\mathbf{G}}^i(l)$, $\hat{\mathbf{H}}^i(l)$, $\hat{\mathbf{O}}^i(l)$, $\hat{\mathbf{\Gamma}}^i(l)$, $\hat{\mathbf{\Delta}}^i(l)$, dos vetores $\hat{\mathbf{x}}_{yu}^i(k)$, $\hat{\mathbf{u}}^i(k)$, para a i -ésima regra, e das variáveis $\hat{\mathbf{x}}_{yu}(k)$, $\hat{\mathbf{u}}(k)$. Em seguida, a partir do modelo nebuloso inverso inicialmente parametrizado, cada submodelo linear inverso, para a i -ésima regra, foi parametrizado de forma recursiva, conforme formulação apresentada nas seções 2.2.1 e 2.2.2.

As estimções dos estados nebulosos inversos $\hat{\mathbf{x}}_{yu}(k)$ encontram-se ilustradas nas Figuras 1 e 2. Já as estimções das saídas do modelo nebuloso inverso, em comparação com as entradas do Helicóptero 2DoF, encontram-se ilustrados nas Figuras 3 e 4. As métricas utilizadas para avaliar a qualidade das estimções paramétricas recursivas, referentes ao modelo nebuloso inverso, e portanto o desempenho da metodologia adotada, foram o erro médio quadrático normalizado (do inglês *Normalized Mean Squared Error* – NMSE), e o índice quadrático de confiabilidade (ou coeficiente de determinação) R^2 . Quanto mais próximo de 0 é o valor do NMSE e mais próximo de 1 é o valor do R^2 , respectivamente, significa que mais exatas e precisas são as estimções. Nas Figuras 5 e 6, encontram-se registrados as métricas supracitadas.

Figura 1. H2DOF: estado estimado do modelo nebuloso $\hat{x}_1(kT_s)$. Etapas: região (estimação inicial), região (estimação recursiva). Unidades: eixo kT_s (s).

4. CONCLUSÕES

A metodologia adotada consistiu na formulação da identificação nebulosa inversa adaptativa com abordagem direta, no contexto do espaço de estados com observador de Kalman, a partir de dados experimentais. Analisando-se os resultados apresentados, pode-se concluir:

- A metodologia proposta nesse artigo possibilita a estimação dos estados (nebulosos) inversos do sistema, o que proporciona o desenvolvimento de novas

Figura 2. H2DOF: estado estimado do modelo nebuloso $\hat{x}_2(kT_s)$. Etapas: região (estimação inicial), região (estimação recursiva). Unidades: eixo kT_s (s).

Figura 3. H2DOF: comparação entre a saída do modelo nebuloso $\hat{u}_1(kT_s)$ e a entrada do sistema $u_1(kT_s)$. Etapas: região (estimação inicial), região (estimação recursiva). Unidades: eixo kT_s (s), eixos $\hat{u}_1(kT_s)$ (V) e $u_1(kT_s)$ (V).

Figura 4. H2DOF: comparação entre a saída do modelo nebuloso $\hat{u}_2(kT_s)$ e a entrada do sistema $u_2(kT_s)$. Etapas: região (estimação inicial), região (estimação recursiva). Unidades: eixo kT_s (s), eixos $\hat{u}_2(kT_s)$ (V) e $u_2(kT_s)$ (V).

Figura 5. H2DOF: métrica do erro médio quadrático normalizado $NMSE$ associada com as saídas do modelo nebuloso inverso $\hat{\mathbf{u}} = [\hat{u}_1, \hat{u}_2]^T$. Etapas: região (estimação inicial), região (estimação recursiva). Unidades: eixo kT_s (s).

Figura 6. H2DOF: métrica confiabilidade R^2 associada com as saídas do modelo nebuloso inverso $\hat{\mathbf{u}} = [\hat{u}_1, \hat{u}_2]^T$. Etapas: região (estimação inicial), região (estimação recursiva). Unidades: eixo kT_s (s).

estratégias de análise de comportamento inverso e de controle de sistemas e fenômenos físicos.

- b) As tendências de otimalidade dos indicadores de qualidade $NMSE$ e R^2 representam a eficiência da metodologia adotada quanto a sua aplicabilidade.

REFERÊNCIAS

Aguirre, L.A. (2015). *Introdução à Identificação de Sistemas: Técnicas Lineares e Não-Lineares Aplicadas a Sistemas Reais*. UFMG, Minas Gerais, 4 edition.

Babuška, R., van der Veen, P.J., and Kaymak, U. (2002). Improved covariance estimation for Gustafson-Kessel clustering. In *Fuzzy Systems, 2002. FUZZ-IEEE'02. Proceedings of the 2002 IEEE International Conference on*, volume 2, 1081–1085.

Babuška, R. (1998). *Fuzzy Modeling for Control*, volume 27. Kluwer Academic Publishers, Boston.

Boukezzoula, R., Galichet, S., and Foulloy, L. (2003). Nonlinear internal model control: Application of inverse model based fuzzy control. *IEEE TRANSACTIONS ON FUZZY SYSTEMS*, 11(6), 814–829.

Chen, C.T. (1999). *Linear System Theory and Design*. Oxford University Press, New York, 3rd. edition.

Filho, O.D.R. and de Oliveira Serra, G.L. (2017). Adaptive neuro fuzzy black box modeling based on instrumental variable evolving algorithm. *Journal of Control, Automation and Electrical Systems*, 28(1), 50–67.

Filho, O.D.R. and de Oliveira Serra, G.L. (2018). Recursive fuzzy instrumental variable based evolving neuro-fuzzy identification for non-stationary dynamic system in a noisy environment. *Fuzzy sets and Systems*, 338, 50–89.

Juang, J.N. (1994). *Applied System Identification*. Prentice Hall, Upper Saddle River, 4. th edition.

Jung, Y. and Enqvist, M. (2013). Estimating models of inverse systems. In *52nd Annual Conference on Decision and Control (CDC)*, 52, 7143–7148. IEEE, Florence.

Lai, G., Liu, Z., Zhang, Y., Chen, C.L.P., Xie, S., and Liu, Y. (2017). Fuzzy adaptive inverse compensation method to tracking control of uncertain nonlinear systems with generalized actuator dead zone. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 25(1), 191–204.

Lee, M.H. and Liu, Y.W. (2014). Input load identification of nonlinear tower structural system using intelligent inverse estimation algorithm. *Procedia Engineering*, 79, 540–549.

Magalhães, A.M. and Serra, G.L.O. (2018). Proposta de identificação de sistemas dinâmicos não lineares baseada em modelo nebuloso takagi-sugeno inverso: Uma abordagem direta no contexto do espaço de estados. In *XXII Congresso Brasileiro de Automática*. João Pessoa. doi: 10.20906/CPS/CBA2018-1064. URL <http://dx.doi.org/10.20906/CPS/CBA2018-1064>.

Nelles, O. (2001). *Nonlinear System Identification: from classical approaches to neural networks and fuzzy models*. Springer, Verlag.

Pires, D. and Serra, G. (2018). An approach for fuzzy kalman filter modeling based on evolving clustering of experimental data. *Journal of Intelligent & Fuzzy Systems*, 35(2), 1819–1834.

Rahbari, O., Omar, N., Firouz, Y., Rosen, M.A., Goutam, S., Bossche, P.V.D., and Mierlo, J.V. (2018). A novel state of charge and capacity estimation technique for electric vehicles connected to a smart grid based on inverse theory and a metaheuristic algorithm. *Energy*, 155, 1047–1058.

Sousa, J.M.C. and Kaymak, U. (2002). *Fuzzy Decision Making in Modeling and Control*, volume 27. World Scientific Series in Robotics and Intelligent Systems.

Sun, C., Mu, C., and Li, X. (2009). A weighted LS-SVM approach for the identification of a class of nonlinear inverse system. *Science in China Series F: Information Sciences*, 52(5), 770–779.

Wu, C.Y., Tsai, J.S.H., Guo, S.M., Shieh, L.S., Canelon, J.I., Ebrahimzadeh, F., and Wang, L. (2015). A novel on-line observer kalman filter identification method and its application to input-constrained active fault-tolerant tracker design for unknown stochastic system. *Journal of the Franklin Institute*, 352, 1119–1151.