Um método para estimação de estados para sistemas discretos com parâmetros variantes no tempo sujeitos a perturbações desconhecidas [★]

Rafael N. Silva ^{*} Luciano Frezzatto ^{**}

^{*} Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica, Universidade Federal de Minas Gerais, MG, (e-mail: rns900@hotmail.com).

^{**} Departamento de Engenharia Eletrônica, Universidade Federal de Minas Gerais, MG, (e-mail: lfrezzatto@ufmg.br)

Abstract: This paper proposes constant observers synthesis conditions for discrete-time linear parameter-varying systems subject to unknown inputs. The approach eliminates the requirement of measuring or estimating the time-varying parameters of the system, which is a recurrent premise in the literature; hence the methodology is also applicable to other classes of systems. The proposed synthesis conditions are provided in terms of linear matrix inequalities, which can be efficiently solved by semidefinite optimization techniques. Numerical examples performed on linear parameter-varying and uncertain systems illustrate the advantages of the approach.

Resumo: Este artigo propõe condições para síntese de observadores com matrizes constante para sistemas discretos lineares com parâmetros variantes sujeitos a entradas desconhecidas. Tal abordagem remove a necessidade de medição ou estimação dos parâmetros variantes do sistema, que é uma premissa recorrente na literatura, fazendo com que a metodologia possa ser aplicada, também, a outras classes de sistemas. As condições de síntese são descritas na forma de desigualdades matriciais lineares o que possibilita uso de técnicas de otimização semidefinida para resolução do problema. A abordagem proposta é validada para sistemas com parâmetros variantes no tempo e incertos por meio de exemplos numéricos.

Keywords: Unknown input observers; Linear parameter-varying systems; Discrete-time systems; Control Theory

Palavras-chaves: Observador de entradas desconhecidas; Sistemas com parâmetros variantes no tempo; Sistemas discretos; Teoria de Controle

1. INTRODUÇÃO

Uma vez que em muitos sistemas o acesso a todos os estados não é possível, observadores podem ser utilizados para estimar os estados não mensuráveis Chen (2013). Tais estados podem ser posteriormente utilizados, por exemplo, para realização de controle por realimentação de estados Doyle and Stein (1979); Stoorvogel et al. (1994) e para detecção ou estimação de falhas Chen and Patton (2012); Hammouri et al. (1999). Observadores também são bastante úteis quando existe limitação na disponibilidade de sensores, dificuldades para instalação ou inviabilidade monetária para sua aquisição Holtz (2002).

Abordagem clássica de reconstrução de estados por meio de medições da entrada e saída do sistema foi proposta por Luenberger Luenberger (1971), e diversas extensões são apresentadas para sistemas lineares e não lineares Zeitz (1987). Uma vez que, geralmente, os observadores

de estados se baseiam em modelos do sistema para prover estimativas dos estados não mensuráveis, incertezas na modelagem e distúrbios indesejados podem levar a divergências significativas na estimação dos estados. Por isso, buscam-se estratégias que reduzam ou eliminem a influência desses componentes indesejados Mondal et al. (2010); Witczak et al. (2013).

Uma técnica utilizada consiste em agrupar as incertezas e entradas não mensuráveis em um vetor de entradas desconhecidas, sendo conhecida na literatura como observador de entradas desconhecidas (do inglês, *Unknown Input Observer* — UIO) Hou and Muller (1992); Yang and Wilde (1988). Condições necessárias e suficiente para a existência de tais observadores são tratadas inicialmente em Darouach et al. (1994) o que torna possível aplicar estratégias de desacoplamento para expressar a dinâmica do erro como livre da entrada desconhecida.

Extensões da abordagem de UIOs vêm sendo desenvolvidas para sistemas não lineares Lipschitz Chen and Saif (2006), sistemas não lineares com representação por meio de modelos fuzzy Takagi-Sugeno Chadli and Karimi (2013); Witczak et al. (2013), para sistemas lineares

[★] O presente trabalho foi realizado com apoios da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001 e da Universidade Federal de Minas Gerais.

com parâmetros variantes no tempo (do inglês, *Linear Parameter-Varying* — LPV) Li et al. (2017); Ichalal and Mammar (2015), dentre outros. No caso do projeto de UIOs para sistemas LPV, faz-se necessária a medição do parâmetro do sistema para que as matrizes do observador possam ser determinadas. Entretanto, assumir que os parâmetros variantes do sistema são todos medidos pode não ser razoável, por motivos similares aos mencionados anteriormente para a medição dos estados do sistema. Assim, estimadores deveriam também ser projetados para tais parâmetros acarretando em um aumento da complexidade do projeto dos UIOs.

Em vista do que foi exposto, neste artigo é proposto um observador de entradas desconhecidas com matrizes constantes para sistemas discretos LPV. A utilização de matrizes constantes remove a necessidade da medição ou da estimação dos parâmetros variantes e, dado o modo como as condições são propostas, uma extensão para tratar o caso de sistemas incertos invariantes no tempo também é abordada. As vantagens do método proposto são ilustradas por meio de exemplos numéricos considerando sistemas com parâmetros variantes no tempo e sistemas incertos.

O restante do artigo é organizado da seguinte forma: na Seção 2 é apresentada a descrição do problema a ser tratado. A principal contribuição deste artigo é dada na Seção 3 juntamente com uma extensão para tratar o problema de sistemas incertos. Exemplos numéricos ilustrando a efetividade da metodologia proposta são dados na Seção 4. Por fim, a Seção 5 conclui este artigo.

2. CONCEITOS PRELIMINARES

Nesta seção é abordada a formulação do problema de projeto do observador de entradas desconhecidas com matrizes constantes para sistemas discretos LPV.

Considere um sistema com parâmetros variantes no tempo descrito na forma

$$\begin{cases} x_{k+1} = A(\alpha_k)x_k + B_1u_k + B_2(\alpha_k)d_k, \\ y_k = Cx_k \end{cases}, \quad (1)$$

com $x_k \in \mathbb{R}^n$ o vetor de estados do sistema, $u_k \in \mathbb{R}^p$ uma entrada conhecida, $d_k \in \mathbb{R}^r$ a entrada desconhecida e $y_k \in \mathbb{R}^q$ a saída mensurada. As matrizes do sistema $A(\alpha_k)$, B_1 , $B_2(\alpha_k)$ e C possuem dimensões apropriadas, sendo B_1 e C assumidas precisamente conhecidas e as matrizes $A(\alpha_k)$ e $B_2(\alpha_k)$ pertencem a um domínio politópico sendo escritas como

$$X(\alpha_k) = \sum_{i=1}^V \alpha_{ik} X_i, \quad \alpha_k \in \Lambda_V. \quad (2)$$

com α_k um vetor de parâmetros variantes no tempo pertencente ao simplex unitário

$$\Lambda_V = \left\{ \beta \in \mathbb{R}^n : \sum_{i=1}^V \beta_i = 1, \beta_i \geq 0, i = 1, \dots, V \right\}. \quad (3)$$

Deseja-se projetar um observador na forma

$$\begin{cases} z_{k+1} = Nz_k + Gu_k + Ly_k \\ \hat{x}_k = z_k - Ey_k, \end{cases} \quad (4)$$

que rejeite a entrada desconhecida d_k , sendo $\hat{x}_k \in \mathbb{R}^n$ o vetor de estados estimado do sistema e $z_k \in \mathbb{R}^n$ o vetor de estados internos do observador. As matrizes N , G , L e E a

serem determinadas possuem dimensões compatíveis e são assumidas constantes. Note que tal escolha possibilita que o observador não dependa do conhecimento *a priori* dos parâmetros dos sistema.

Definindo, então, o erro de estimação como $e_k = x_k - \hat{x}_k$, obtém-se

$$e_k = (I + EC)x_k - z_k = Mx_k - z_k, \quad (5)$$

Tomando o sistema LPV (1) a dinâmica do erro é dada por

$$e_{k+1} = Ne_k + (MA(\alpha_k) - N - KC)x_k + (MB_1 - F)u_k + MB_2(\alpha_k)d_k, \quad (6)$$

com $K = NE + L$. Para que haja o desacoplamento do sinal u_k e da entrada desconhecida d_k , é necessário que as seguintes condições sejam satisfeitas

$$MB_1 - F = 0 \quad (7)$$

$$MB_2(\alpha_k) = 0. \quad (8)$$

Para que exista M que satisfaça a condição de desacoplamento (8) é necessário e suficiente que $\text{rank}(B_2(\alpha_k)) = \text{rank}(CB_2(\alpha_k))$, $\forall \alpha_k \in \Lambda_V$ Chen and Patton (2012). A condição (7) é satisfeita pela escolha apropriada da matriz F , após a definição da estrutura da matriz M . Assim a dinâmica do erro de estimação passa a ser dada por

$$e_{k+1} = Ne_k + (MA(\alpha_k) - N - KC)x_k, \quad (9)$$

Note que não é possível realizar o desacoplamento dos estados x_k do erro de estimação e_k , dadas as escolhas para as matrizes do observador. Desse modo, o projeto do UIO deve ser tal que a influência dos estados do sistema sobre a dinâmica do erro de estimação seja atenuada, similar a minimização do ganho ℓ_2 sobre o sistema Zemouche et al. (2008); Li and Fu (1997). O objetivo, portanto, consiste em determinar L e N tais que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} e_k = 0, \quad \text{para } x_k = 0 \quad (10)$$

$$\|e\|_{\ell_2} \leq \gamma \|x\|_{\ell_2}, \quad \text{para } x_k \neq 0, e_0 = 0, \quad (11)$$

sendo

$$\|x\|_{\ell_2} = \sqrt{\sum_{k=0}^{\infty} x_k^T x_k}. \quad (12)$$

3. METODOLOGIA

Nesta seção são apresentadas as condições LMIs para síntese do observador que garante as condições (10) e (11) e atenua a influência dos estados do sistema na dinâmica do erro de estimação.

Teorema 1. Dada uma matriz M que satisfaz a condição (8), se existirem matrizes $P = P^T \succ 0$, X , Y e um escalar $\gamma \geq 0$ soluções do problema de otimização

$$\min \gamma^2$$

$$\begin{bmatrix} P - I & 0 & X^T \\ * & \gamma^2 I & (MA_i)^T P - X^T - C^T Y^T \\ * & * & P \end{bmatrix} \succ 0, \quad (13)$$

para todo $i = 1, \dots, V$, então existe um observador dado na forma (4) com matrizes $N = P^{-1}X$ e $L = NE - P^{-1}Y$.

Prova. Para que sejam satisfeitas as condições (10) e (11) é suficiente encontrar uma função de Lyapunov $V(e_k)$ tal que:

$$\Delta V(e_k) + e_k^T e_k - \gamma^2 x_k^T x_k < 0, k = 0, \dots, \infty, \quad (14)$$

em que $\Delta V(e_k) = V(e_{k+1}) - V(e_k)$. Observa-se que, para o caso de $x_k = 0$, $\Delta V(e_k) < -e_k^T e_k < 0$, o que satisfaz a condição (10). Para $x_k \neq 0$ pode-se definir uma função de custo

$$J = \sum_{k=0}^{\infty} (\Delta V(e_k) + e_k^T e_k - \gamma^2 x_k^T x_k) < 0. \quad (15)$$

que pode ser reescrito como

$$J = V(e_{\infty}) - V(e_0) + \|e\|_{\ell_2}^2 - \gamma^2 \|x\|_{\ell_2}^2 < 0. \quad (16)$$

Uma vez que $V(e_0) = 0$ para $e_0 = 0$ e $V(e_{\infty}) > 0$ a condição (11) é então satisfeita. Escolhendo uma função de Lyapunov quadrática do tipo

$$V_k = e_k^T P e_k, \quad P \succ 0, \quad (17)$$

definindo $s_k^T = [e_k^T, x_k^T]$ a condição (14) pode ser escrita na forma

$$s_k^T \begin{bmatrix} N^T P N - P + I \\ S(\alpha_k)^T P N \\ N^T P S(\alpha_k) \\ S^T(\alpha_k) P S(\alpha_k) - \gamma^2 I \end{bmatrix} s_k < 0, \quad (18)$$

sendo

$$S(\alpha_k) = M A(\alpha_k) - N - K C. \quad (19)$$

Reescrevendo a condição (18) como

$$\begin{bmatrix} P - I & 0 \\ * & \gamma^2 I \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} N^T P \\ S^T(\alpha_k) P \end{bmatrix} [P^{-1}] \times \begin{bmatrix} N P & P S^T(\alpha_k) \end{bmatrix} \succ 0 \quad (20)$$

e, por meio do complemento de Schur, obtêm-se a condição equivalente

$$\begin{bmatrix} P - I & 0 \\ * & \gamma^2 I \\ * & * \\ (M A(\alpha_k))^T P - N^T P - C^T K^T P \\ P \end{bmatrix} \succ 0, \quad (21)$$

Uma vez que $A(\alpha_k)$ pertence ao politopo descrito em (2) é, então, suficiente que

$$\begin{bmatrix} P - I & 0 \\ * & \gamma^2 I \\ * & * \\ (M A_i)^T P - N^T P - C^T K^T P \\ P \end{bmatrix} \succ 0, \quad (22)$$

para todo $i = 1, \dots, V$. Fazendo a troca de variáveis $N^T P = X^T$ e $K^T P = Y^T$ resulta em (13).

Observação 1. Note que as condições do Teorema 1 podem ser, também, aplicadas a um sistema incerto invariante no tempo. Para tal, basta definir $\alpha_k = \alpha$ e derivar as condições de forma similar ao apresentado na prova do Teorema 1.

4. RESULTADOS E DISCUSSÕES

Nesta seção são apresentados três exemplos tratando sistemas LPV e sistemas incertos. Todos os experimentos

numéricos foram realizados em MATLAB 2016a usando o parser YALMIP Löfberg (2004) e o solver SeDuMi Sturm (1999).

Devido à inexistência de outros métodos na literatura para síntese de UIOs constantes para sistemas LPV ou incertos, não são apresentadas comparações nos exemplos reportados. Ademais, os autores desconhecem outras metodologias para síntese de UIOs que tratem diretamente sistemas incertos.

Exemplo 1. Este é um exemplo adaptado de Duan et al. (2006) em que são acrescidos os termos referentes à entrada desconhecida d_k .

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -0.5 \\ 1 & 1 + \delta \end{bmatrix}, \quad B_1 = \begin{bmatrix} -6 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B_2 = \begin{bmatrix} \delta \\ -\delta \end{bmatrix}, \quad (23)$$

$$C = [-100 \ 10],$$

sendo $|\delta| \leq 0.4$. Uma representação politópica com dois vértices pode ser obtida considerando os valores extremos de δ .

Aplicando as condições do Teorema 1 ao sistema (23) obteve-se um limitante superior para o fator de atenuação dado por $\gamma = 0.8014$ e as seguintes matrizes do observador

$$N = \begin{bmatrix} 0.0054 & 0.0537 \\ 0.0537 & 0.5372 \end{bmatrix}, \quad F = \begin{bmatrix} -0.4545 & 0 \\ -4.5455 & 0 \end{bmatrix},$$

$$L = \begin{bmatrix} -0.0004 \\ -0.0039 \end{bmatrix}, \quad E = [0.0091 \ -0.0091].$$

O sistema em conjunto com o observador projetado é simulado assumindo que as entradas d_k e u_k são sinais pseudoaleatórios gerados com distribuição normal padrão, ou seja, com média nula e variância unitária. As condições iniciais para os estados do sistema e do observador são, respectivamente, $x_0 = [1, 0]^T$ e $z_0 = [0, 0]^T$. A Figura 1 mostra a dinâmica do erro de estimação para cada estado do sistema, enquanto a Figura 2 apresenta a evolução dos estados reais e estimados ao longo da simulação. Dada a magnitude dos estados do sistema, nota-se que existe uma estimação adequada para dinâmica do sistema a partir do observador projetado.

Para assegurar a validade do método proposto realizou-se uma simulação de Monte Carlo, repetindo o experimento por 1000 vezes para o sistema (23) com diferentes valores para o vetor α , os quais foram sorteados de modo arbitrário no início de cada simulação. As condições iniciais para os estados do sistema e do observador foram mantidas as mesmas assim como as considerações acerca das entradas u_k e d_k . Os valores da norma ℓ_2 do erro e_k e dos estados do sistema x_k foram computados, obtendo-se uma estimativa para o fator de atenuação em cada simulação. O valor máximo de atenuação obtido foi $\gamma_{\max} = 0.6318$ e o valor médio $\bar{\gamma} = 0.1697$, valores abaixo do obtido pelo Teorema 1.

Exemplo 2. Considere o seguinte exemplo numérico modificado de Geromel et al. (2000) com as matrizes do sistema na forma (1) dadas por

Figura 1. Valor do erro de estimação para os estados x_1 (e_1) e x_2 (e_2) para o sistema do Exemplo 1.

Figura 2. Comparação entre os estados reais e estados os estimados pelo observador para o sistema do Exemplo 1.

$$\begin{aligned} A &= \begin{bmatrix} 0.9 & 0.1 + 0.06\theta_k \\ 0.01 + 0.05\sigma_k & 0.9 \end{bmatrix} \\ B_1 &= \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} & B_2 &= \begin{bmatrix} 0 \\ 1 + 0.5\sigma_k \end{bmatrix} \\ C &= [1 \ 1] \end{aligned} \quad (24)$$

no qual $|\theta_k| \leq 1$ e $|\sigma_k| \leq 1$ são parâmetros arbitrários variantes no tempo. Uma representação politópica pode ser obtida considerando os valores extremos de cada parâmetro, resultando em um politopo de quatro vértices.

Aplicando as condições do Teorema 1 ao sistema (23) obteve-se um limitante para o fator de atenuação dado por $\gamma = 0.4064$.

Foi, então, realizada uma simulação do sistema assumindo entradas d_k e u_k como sinais pseudoaleatórios com distribuição normal padrão e as condições iniciais para os

estados do sistema e do observador são, respectivamente, $x_0 = [1, 1]^T$ e $z_0 = [0, 0]^T$. A Figura 3 apresenta o comportamento dos erros de estimação para cada um dos estados e, na Figura 4, a comparação entre os estados reais e estimados do sistema é ilustrada. Para tal caso o fator de atenuação estimado foi $\gamma = 0.1524$, inferior ao limitante superior obtido pelas condições LMIs.

Figura 3. Valor de erro de estimação para os estados x_1 (e_1) e x_2 (e_2) para o sistema do Exemplo 2.

Figura 4. Comparação entre os estados reais e estimados para o sistema não linear do Exemplo 2.

Exemplo 3. Seja um sistema LPV gerado aleatoriamente dado pelos vértices:

$$\begin{aligned} A_1 &= \begin{bmatrix} 0.52 & 0.57 \\ 0.22 & 0.15 \end{bmatrix} & A_2 &= \begin{bmatrix} 0.24 & -0.77 \\ -0.01 & 0.40 \end{bmatrix} \\ B_1 &= \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} & B_{21} &= B_{22} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \\ C &= [1 \ 0] \end{aligned}$$

Para esse sistema, o limitante superior para o fator de atenuação obtido a partir das condições do Teorema 1 é $\gamma = 0.2314$

Assim como feito nos exemplos anteriores, realizou-se uma simulação do sistema assumindo entradas d_k e u_k como sinais pseudoaleatórios com distribuição normal padrão, o vetor de parâmetros α_k é definido de forma arbitrária a cada instante k e as condições iniciais para os estados do sistema e do observador são $x_0 = [1, -1]^T$ e $z_0 = [0, 0]^T$ respectivamente. O comportamento dos erros de estimação para cada um dos estados é ilustrado na Figura 5 e a comparação entre os estados reais e estimados é mostrado na Figura 6.

Figura 5. Valor de erro de estimação para os estados x_1 (e_1) e x_2 (e_2) para o sistema do Exemplo 3.

Figura 6. Comparação entre os estados reais e estimados para o sistema não linear do Exemplo 3.

O método de Monte Carlo é aplicado também ao sistema do Exemplo 3 sendo realizadas 1000 simulações. Nesse caso, o vetor de parâmetros α_k é sorteado de modo aleatório a cada instante de tempo para todas as simulações. Foram mantidas as mesmas condições iniciais e considerações a cerca de u_k e d_k . Estimativas numéricas do fator de atenuação γ foram obtidos por meio do computo da razão entre as normas ℓ_2 do erro e_k e dos estados do sistema x_k .

O valor máximo de atenuação obtido foi $\gamma_{max} = 0.1155$ e valor médio $\bar{\gamma} = 0.0911$, valores abaixo do obtido pelo Teorema 1.

5. CONCLUSÃO

Neste trabalho foram propostas condições de síntese para um observador de entradas desconhecidas com matrizes constantes para sistemas discretos com parâmetros variantes no tempo. Ademais, para garantir que a influência direta dos estados do sistema sobre o erro de estimação fosse atenuada, incluiu-se um critério de custo similar ao ganho ℓ_2 . A principal vantagem do observador projetado reside no fato de que não é necessário medir ou estimar os parâmetros do sistema para computar as matrizes de observação. Dadas as características do observador projetado, as condições de síntese podem ser portadas para outros tipos de sistemas, por exemplo, sistemas incertos e sistemas fuzzy, sem a necessidade de modificações nas condições apresentadas. Os exemplos numéricos demonstraram que, apesar dos erros de estimação não tenderem assintoticamente para zero, as estimativas providas foram bastante adequadas, aproximando de forma satisfatória os estados reais do sistema. Um contraponto da metodologia proposta é que não é possível realizar a estimação dos estados para sistemas instáveis, uma vez que a dinâmica do estado ainda influencia de forma direta na dinâmica do erro de estimação.

REFERÊNCIAS

- Chadli, M. and Karimi, H.R. (2013). Robust Observer Design for Unknown Inputs Takagi-Sugeno Models. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 21(1), 158–164. doi:10.1109/TFUZZ.2012.2197215.
- Chen, C.T. (2013). *Linear System Theory and Design*. The Oxford Series in Electrical and Computer Engineering. Oxford University Press.
- Chen, J. and Patton, R.J. (2012). *Robust Model-Based Fault Diagnosis for Dynamic Systems*. Springer Publishing Company, Incorporated.
- Chen, W. and Saif, M. (2006). Unknown input observer design for a class of nonlinear systems: An LMI approach. In *Proceedings of the 2006 American Control Conference*, 835–838. Minneapolis, MN, USA. doi:10.1109/ACC.2006.1655461.
- Darouach, M., Zasadzinski, M., and Xu, S.J. (1994). Full-order observers for linear systems with unknown inputs. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 39(3), 606–609. doi:10.1109/9.280770.
- Doyle, J. and Stein, G. (1979). Robustness with observers. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 24(4), 607–611. doi:10.1109/TAC.1979.1102095.
- Duan, Z., Zhang, J., Zhang, C., and Mosca, E. (2006). Robust H_2 and H_∞ filtering for uncertain linear systems. *Automatica*, 42(11), 1919–1926. doi:https://doi.org/10.1016/j.automatica.2006.06.004.
- Geromel, J., Bernussou, J., Garcia, G., and de Oliveira, M. (2000). H_2 and H_∞ robust filtering for discrete-time linear systems. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 38(5), 1353–1368. doi:10.1137/S0363012997327379.
- Hammouri, H., Kinnaert, M., and El Yaagoubi, E.H. (1999). Observer-based approach to fault detection and

- isolation for nonlinear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 44(10), 1879–1884. doi:10.1109/9.793728.
- Holtz, J. (2002). Sensorless control of induction motor drives. *Proceedings of the IEEE*, 90(8), 1359–1394. doi:10.1109/JPROC.2002.800726.
- Hou, M. and Muller, P.C. (1992). Design of observers for linear systems with unknown inputs. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 37(6), 871–875. doi:10.1109/9.256351.
- Ichalal, D. and Mammar, S. (2015). On Unknown Input Observers for LPV Systems. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 62(9), 5870–5880. doi:10.1109/TIE.2015.2448055.
- Li, H. and Fu, M. (1997). A linear matrix inequality approach to robust H_∞ filtering. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 45(9), 2338–2350. doi:10.1109/78.622956.
- Li, S., Wang, H., Aitouche, A., Tian, Y., and Christov, N. (2017). Robust unknown input observer design for state estimation and fault detection using linear parameter varying model. *Journal of Physics: Conference Series*, 783, 012001. doi:10.1088/1742-6596/783/1/012001.
- Löfberg, J. (2004). YALMIP : A Toolbox for Modeling and Optimization in MATLAB. In *Proceedings of the 2004 IEEE International Symposium on Computer Aided Control Systems Design*. Taipei, Taiwan.
- Luenberger, D. (1971). An introduction to observers. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 16(6), 596–602. doi:10.1109/TAC.1971.1099826.
- Mondal, S., Chakraborty, G., and Bhattacharyy, K. (2010). LMI approach to robust unknown input observer design for continuous systems with noise and uncertainties. *International Journal of Control, Automation, and Systems*, 8(2), 210–219. doi:10.1007/s12555-010-0205-9.
- Stoorvogel, A.A., Saberi, A., and Chen, B.M. (1994). A reduced order observer based controller design for H_∞ -optimization. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 39(2), 355–360. doi:10.1109/9.272333.
- Sturm, J. (1999). Using SeDuMi 1.02, a MATLAB toolbox for optimization over symmetric cones. *Optimization Methods and Software*, 11–12, 625–653. <http://sedumi.ie.lehigh.edu>.
- Witczak, M., Korbicz, J., and Józefowicz, R. (2013). A H_∞ approach to robust fault estimation of non-linear discrete-time systems. In *Proceedings of the 2013 European Control Conference*, 1433–1438. Zurich, Switzerland. doi:10.23919/ECC.2013.6669317.
- Yang, F. and Wilde, R.W. (1988). Observers for linear systems with unknown inputs. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 33(7), 677–681. doi:10.1109/9.1278.
- Zeitz, M. (1987). The extended Luenberger observer for nonlinear systems. *Systems & Control Letters*, 9(2), 149–156. doi:https://doi.org/10.1016/0167-6911(87)90021-1.
- Zemouche, A., Boutayeb, M., and Bara, G. (2008). Observers for a class of Lipschitz systems with extension to H_∞ performance analysis. *Systems & Control Letters*, 57(1), 18–27.