APLICAÇÃO DO MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS NO CÁLCULO DE TRELIÇAS PLANAS

Thaís da Costa Dias ⁽¹⁾ (thaisdias.engmec@hotmail.com), Jorge Nei Brito ⁽²⁾ (brito@ufs.br)

⁽¹⁾ Universidade Federal de São João del-Rei (UFSJ) | Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica (PPMEC)

⁽²⁾ Universidade Federal de São João del-Rei (UFSJ) | Departamento de Engenharia Mecânica (DEMEC)

RESUMO: *O Método dos Elementos Finitos (MEF) tem sido cada vez mais utilizado nos últimos anos devido à possibilidade de análise de problemas complexos que seriam difíceis ou até mesmo inviáveis de serem solucionados de forma analítica. Contudo, é importante que o usuário compreenda os conceitos relacionados a essa ferramenta visando evitar erros, principalmente relacionados a simplificação do modelo e condições de contorno. O presente trabalho consiste no desenvolvimento de uma rotina baseada no método dos elementos finitos para o cálculo dos deslocamentos, forças, deformações e tensões de uma treliça plana, considerando-se dois casos: treliça de aço e treliça de alumínio. A malha foi discretizada com elementos unidimensionais de barra. Para as condições adotadas, a treliça de aço apresentou-se mais rígida, como esperado, pois o aço possui o módulo de elasticidade maior que o do alumínio e a área da seção transversal dos elementos, bem como o comprimento, foram mantidos constantes. Os resultados confirmam que a aplicação do Método dos Elementos finitos por meio do software Scilab, ou similar, facilita os cálculos, além de proporcionar uma economia de tempo para a solução dos problemas.*

PALAVRAS-CHAVE: TENSÃO, DEFORMAÇÃO, SCILAB, ELEMENTO UNIDIMENSIONAL.

APPLICATION OF THE FINITE ELEMENTS METHOD IN THE CALCULATION OF PLANE TRUSSES

ABSTRACT: *The Finite Element Method (FEM) has been increasingly used in recent years due to the possibility of analyzing complex problems that would be difficult or even impossible to solve analytically. However, it is important that the user understands the concepts related to this tool in order to avoid errors, mainly related to model simplification and boundary conditions. The present work consists in the development of a routine based on the finite element method to calculate the displacements, forces, deformations and stresses of a flat lattice, considering two cases: steel lattice and aluminum lattice. The mesh was discretized with one-dimensional bar elements. For the adopted conditions, the steel lattice was more rigid, as expected, since steel has a greater modulus of elasticity than aluminum and the cross-sectional area of the elements, as well as the length, were kept constant. The results confirm that the application of the Finite Element Method through Scilab software, or similar, facilitates the calculations, as well as saving time for solving the problems.*

KEYWORDS: STRESS, DEFORMATION, SCILAB, ONE-DIMENSIONAL ELEMENT.

1. INTRODUÇÃO

Algumas estruturas e componentes de máquinas possuem forma geométrica complexa, tornando o cálculo de tensão e deformação difícil ou até inviável por meios analíticos. Neste caso, é possível dividir o volume da peça em um conjunto finito de elementos contínuos e discretos e resolver um conjunto de equações, onde cada equação é aplicada sobre um elemento e seus nós, que conectam elementos entre si.

De acordo com Norton (2013), o conceito da análise pelo Método dos Elementos Finitos (MEF), do inglês *Finite Element Method* (FEM) é muito simples, mas os cálculos que o acompanham não são. Há uma teoria matemática por trás do método dos elementos finitos. O advento dos computadores e softwares comerciais de análise facilitou a utilização desta técnica. Muitos softwares já possuem o método dos elementos finitos implementado, além de possuírem interface com diversos softwares de modelagem de desenho (CAD). Apesar da maior facilidade, atualmente, para a obtenção de resultados de análises pelo MEF, é importante que o usuário compreenda direito como utilizar a ferramenta de forma adequada visando evitar erros. Portanto, além de saber aplicar, é importante que o usuário entenda a teoria que embasa o MEF.

As tensões variam através do contínuo de qualquer componente. Dividindo esse componente em um número finito de elementos discretos conectados pelos seus nós (chamados de malha), pode-se obter uma aproximação das tensões e deformações, em qualquer parte do componente, para um dado conjunto de condições de contorno e de cargas aplicadas em alguns nós da estrutura. O método dos elementos finitos não é limitado à análise estrutural. Ele também é utilizado em problemas de mecânica dos fluidos, transferência de calor, acústica, eletromagnetismo e outros problemas mais especializados (NORTON, 2013).

Muitas formulações matemáticas diferentes têm sido propostas e utilizadas desde quando o método dos elementos finitos foi programado pela primeira vez, em 1956, e ganhou seu nome no trabalho de Turner *et al.* (1956). Com relação ao emprego do MEF na engenharia de estruturas, alguns trabalhos podem ser citados tais como o de Christoforo *et al.* (2007), Nogueira e Bezerra (2017), Silva *et al.* (2019) entre outros.

Segundo Beer *et al.* (2010), as treliças são comumente utilizadas em pontes e construções e são uma solução prática e econômica para várias situações de engenharia. As treliças são estruturas formadas unicamente por elementos retilíneos que estão conectados entre si em suas extremidades, com o objetivo de suportar cargas.

O presente trabalho tem o objetivo de apresentar o cálculo de uma treliça plana baseado na metodologia dos elementos finitos. Utilizou-se o *Scilab*, que é um *software* científico para

computação numérica semelhante ao MATLAB. Os cálculos foram realizados para uma mesma estrutura, porém foram considerados dois casos: um em que a treliça era constituída de aço e outro de alumínio e os resultados foram comparados. Ambas as estruturas foram discretizadas em uma malha de 5 elementos de barra (elemento unidimensional) e 4 nós.

2. MATERIAIS E MÉTODOS

2.1. Método dos Elementos Finitos (MEF)

Segundo Christoforo *et al.* (2007), o método dos elementos finitos pode ser considerado como uma técnica de gerar funções de aproximação, que podem ser utilizadas para interpolar deslocamentos, esforços, tensões e deformações ao longo do domínio do elemento. Para a resolução de problemas estruturais, as funções de forma podem ser aplicadas diretamente à sua equação diferencial (Resíduos Ponderados) ou a princípios energéticos, tais como o Princípio dos Trabalhos Virtuais (PTV).

O deslocamento em problemas estruturais elásticos é tido como incógnita fundamental, obtido por intermédio da resolução de um sistema de equações lineares, assim como expressa a Equação 1, onde $[K]$ é a matriz de rigidez da estrutura; $\{U\}$ é o vetor dos deslocamentos nodais da estrutura e $\{F\}$ é o vetor das forças equivalentes nodais da estrutura.

$$[K]\{U\}=\{F\} \quad (1)$$

A sua construção fica em função da disposição da malha, e consequentemente dos nós dos elementos finitos da estrutura, como pode ser visto na Figura 1. A treliça foi discretizada em uma malha com 5 elementos de barra e 4 nós.

FIGURA 1. Discretização da malha de elementos finitos da treliça. Fonte: Autora (2019).

2.2. Formulação para Elemento Unidimensional

Para o elemento unidimensional considera-se que as barras são perfeitamente retas, os deslocamentos são pequenos, o material é elástico linear e tem-se apenas um grau de liberdade por nó (deslocamentos axiais).

A formulação do elemento finito foi desenvolvida segundo a aplicação do MEF no PVT, conforme descrita em Christoforo *et al.* (2007). Nesta metodologia o conhecimento das equações diferenciais, oriundas dos problemas de barras de treliça, tornam-se desnecessários.

De acordo com a Figura 2 o PVT pode ser expresso pela Equação 2 onde dV é o volume do elemento de dimensões infinitesimais; dS é a superfície das faces do elemento de dimensões infinitesimais; $P(S)$ é a força de superfície; F é a força pontual; $b(x)$ é a força por unidade de volume; Δ_v é o deslocamento virtual; $\epsilon(x)_v$ é a deformação virtual e $\sigma(x)$ são as tensões.

FIGURA 2. Barra de treliça no espaço. Fonte: Christoforo *et al.* (2007).

$$\Delta_v \cdot F + \int_V \Delta_v \cdot b(x) dV + \int_S \Delta_v \cdot P(S) dS = \int_V \epsilon(x)_v \cdot \sigma(x) dV \quad (2)$$

O primeiro membro da Equação 1 contabiliza o trabalho das forças externas atuantes no elemento estrutural. O segundo, contabiliza o trabalho dos esforços internos ou a energia de deformação interna do corpo.

Para a aplicação do PTV ao elemento de barra, o conhecimento das hipóteses geométricas responsáveis por descrever o seu campo de deformações torna-se necessário.

A deformação para um elemento de barra solicitado na direção do seu eixo principal é ilustrado pela Figura 3 e expresso pela Equação 3, onde ϵ_x é a deformação na direção x ; $U(x)$ é a função dos deslocamentos da barra; Δdx é variação do comprimento do elemento infinitesimal e dx o comprimento original do elemento infinitesimal.

FIGURA 3. Deformação em uma barra por solicitação normal. Fonte: Christoforo *et al.* (2007).

$$\epsilon_x = \frac{\Delta dx}{dx} = \frac{d}{dx} (U(x)) = U'(x) \quad (3)$$

A tensão normal com a direção do eixo principal para um elemento reticulado (barra de treliça) é determinada segundo a Equação 4, onde σ_x é a tensão normal na direção do eixo x do elemento; σ é o tensor das tensões; ϵ é o tensor das deformações; D é o tensor constitutivo de rigidez e E é o módulo de elasticidade longitudinal.

$$\sigma = D\epsilon \Rightarrow \sigma_x = E\epsilon_x \quad (4)$$

O elemento finito utilizado para o cálculo da área das seções transversais para os elementos estruturais possui dois nós, sendo composto por um grau de liberdade por nó (deslocamentos), conforme mostrado na Figura 4.

FIGURA 4. Elemento finito (barra de treliça). Fonte: Autora (2019).

Uma suposição simples é propor que os valores nodais variam linearmente dentro do elemento. A função de forma ($\varphi(x)$) adotada para o problema é um polinômio do primeiro grau. Este polinômio possui dois coeficientes (**a** e **b**), representando os graus de liberdade para o elemento finito. O polinômio é expresso pela Equação 5.

$$\varphi(x) = ax + b \quad (5)$$

O objetivo desta função consiste em interpolar o campo de deslocamentos no interior do elemento finito ($U(x)$), em função dos seus deslocamentos nodais. Como o elemento finito possui dois graus de liberdade, a função de aproximação do campo de deslocamentos ao longo do seu domínio é constituída de duas parcelas expressas pela Equação 6, onde U_i é o deslocamento no nó i e U_j é o deslocamento no nó j , $\varphi_1(x)$ é a função de forma para o nó i e $\varphi_2(x)$ é a função de forma para o nó j .

$$U(x) = U_i \varphi_1(x) + U_j \varphi_2(x) \quad (6)$$

Os coeficientes para as duas funções de forma, contidas na função aproximativa do campo de deslocamentos, são determinados mediante a aplicação da técnica de elementos finitos, que consiste em atribuir um "deslocamento unitário" a um dos graus de liberdade do elemento mantendo-se os demais nulos, repetindo-se este processo para todos os demais graus de liberdade do elemento. A função aproximativa dos deslocamentos, segundo a técnica de elementos finitos, é ilustrada na Figura 5.

FIGURA 5. Funções de forma segundo o MEF elemento de barra. Fonte: Christoforo *et al.* (2007).

As duas funções de forma ($\varphi_1(x)$ e $\varphi_2(x)$) determinadas mediante a técnica de elementos finitos são expressas pelas Equações 7 e 8, onde h_e é o comprimento do elemento.

$$\begin{aligned} \text{Para: } \varphi_1(0) &= 1 & \varphi_1(x) &= -\frac{1}{h_e} x + 1 \\ \varphi_1(h_e) &= 0 & & \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} \text{Para: } \varphi_2(0) &= 0 & \varphi_2(x) &= \frac{1}{h_e} x & (8) \\ \varphi_2(h_e) &= 1 \end{aligned}$$

A deformação para o elemento de treliça é calculada mediante a primeira derivada da sua função de deslocamento. Sendo assim, o campo de deformações ao longo do elemento finito é determinado calculando-se a primeira derivada de sua função aproximativa de deslocamentos, expressa pela Equação 9, onde $\dot{\epsilon}(x)$ é a primeira derivada da função deslocamento, $\varphi_1'(x)$ é a primeira derivada da função de forma no nó i e $\varphi_2'(x)$ é a primeira derivada da função de forma no nó j.

$$\dot{\epsilon}(x) = U_i \varphi_1'(x) + U_j \varphi_2'(x) \quad (9)$$

A matriz de rigidez ($[K_e]$) e o vetor das forças equivalentes nodais ($\{F_{eq}\}$) (desconsiderando-se as forças de superfície e volume) para o elemento finito são determinados substituindo-se as Equações 4 e 9 na Equação 1, assim como expressam respectivamente as Equações 10 e 11, em que S é a área da seção transversal do elemento; L é o comprimento do elemento; E o módulo de elasticidade do material; F_i força no nó i e F_j força no nó j.

$$[K_e] = \frac{ES}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (10)$$

$$\{F_{eq}\} = \begin{Bmatrix} F_i \\ F_j \end{Bmatrix} \quad (11)$$

Dessa forma, tem-se a matriz de rigidez e vetor forças equivalentes nodais para a barra de treliça considerando o sistema de coordenadas locais. Para se obter os deslocamentos de toda a estrutura é necessário o conhecimento das coordenadas globais.

Ochsner (2016) apresenta o procedimento para a obtenção da matriz rigidez global, em que a coordenada x local é girada por um ângulo α contra a coordenada global do sistema. Por fim, tem-se a solução global para o elemento de barra (Equação 12), em que S é a área da seção transversal do elemento; u é o deslocamento; L é o comprimento do elemento; F é a força aplicada e E o módulo de elasticidade do material.

As matrizes de rigidez dos elementos compõem a matriz de rigidez global de toda a estrutura. As linhas e colunas referentes aos deslocamentos nulos podem ser desconsideradas e o sistema de equações lineares (Equação 1) pode ser reduzido de forma a ser solucionado.

$$\frac{SE}{L} \begin{bmatrix} \cos^2 \alpha & \cos \alpha \sin \alpha & -\cos^2 \alpha & -\cos \alpha \sin \alpha \\ \cos \alpha \sin \alpha & \sin^2 \alpha & -\cos \alpha \sin \alpha & -\sin^2 \alpha \\ -\cos \alpha & -\cos \alpha \sin \alpha & \cos^2 \alpha & \cos \alpha \sin \alpha \\ -\cos \alpha \sin \alpha & -\sin^2 \alpha & \cos \alpha \sin \alpha & \sin^2 \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{1x} \\ u_{1y} \\ u_{2x} \\ u_{2y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{1x} \\ F_{1y} \\ F_{2x} \\ F_{2y} \end{bmatrix} \quad (12)$$

2.3. Programação

O *Scilab* é um *software* científico para computação numérica semelhante ao MATLAB. Para que os cálculos fossem implementados no *Scilab* se fez necessário o conhecimento da linguagem de programação do *software*, que foi adquirido por meio dos tutoriais do próprio *software*, além de Ferreira (2009) e Ochsner (2016).

Os cálculos foram realizados para a treliça da Figura 1, considerando-se dois casos: estrutura toda composta de barras de aço e composta de barras de alumínio. Os dados de entrada foram duas matrizes, uma com as coordenadas dos nós (Tabela 1) e outra matriz representando a tabela de conectividade (Tabela 2). A tabela de conectividade indica o nó inicial e o nó final dos elementos.

TABELA 1. Tabela de coordenadas dos nós.

Nó	x [m]	y [m]
1	0	0
2	2	0
3	2	1,5
4	0	1,5

Fonte: Autora (2019).

TABELA 2. Tabela de Conectividade.

Elemento	Nó inicial	Nó final
I	1	2
II	2	3
III	3	4
IV	1	4
V	1	3

Fonte: Autora (2019).

Posteriormente, foram definidas as propriedades da estrutura. Sendo a área da seção transversal de todas as barras iguais a **800 mm²** e o módulo de elasticidade de **200 GPa** para o aço e **70 GPa** para o alumínio.

Finalmente, foi criada uma rotina levando em consideração as condições de contorno. Uma força de **5 kN** aplicada no nó **3**, na direção negativa de **y**, e outra força de **4 kN** aplicada no nó **4**, na direção negativa de **x**. Os dois apoios no nó **1** e **2** restringem o movimento nas direções **x** e **y** para estes nós. Calcularam-se as matrizes de rigidez dos elementos e a matriz global da estrutura, dessa forma foi possível obter os deslocamentos e as demais incógnitas.

3. RESULTADOS E CONCLUSÕES

Na Tabela 3 tem-se os resultados gerados pelo programa para os deslocamentos e forças de cada nó da treliça de aço nas direções **x** e **y**. O maior deslocamento em **x** ocorreu no **nó 4** e em **y** no **nó 3**, como também ilustra a Figura 6.

TABELA 3. Deslocamentos e Forças em x e y para a treliça de aço.

Nó	Deslocamento em x [m]	Deslocamento em y [m]	Força em x [N]	Força em y [N]
1	0	0	4000	3000
2	0	0	0	2000
3	-0,00008359	-0,00001875	0	-5000
4	-0,00013359	0	-4000	0

Fonte: Autora (2019).

FIGURA 6. Representação da deformação em x e y da treliça de aço (a imagem não está na escala real). Fonte: Autora (2019).

O somatório de forças que atuam na estrutura nas direções **x** e **y** é nulo, estando de acordo com a condição de equilíbrio estático. Assim como o deslocamento, as deformações dos elementos, Tabela 4, foram pequenas, sendo o elemento **5** com maior deformação em relação aos

demais. A tensão atuando nos elementos **1** e **4** é nula, os elementos **2** e **5** estão sob compressão, **2,5** e **6,25 MPa**, respectivamente. Já o elemento **3** está sob tração de **5 MPa**. Todas as tensões encontram-se abaixo do limite de escoamento do material.

TABELA 4. Tensão e deformação dos elementos da treliça de aço.

Elemento	Deformação	Tensão [MPa]
1	0	0
2	-0,0000125	-2,5
3	0,000025	5
4	0	0
5	0,00003125	-6,25

Fonte: Autora (2019).

Na Tabela 5 tem-se os resultados gerados pelo programa para os deslocamentos e forças de cada nó da treliça de alumínio nas direções **x** e **y**. O maior deslocamento em **x** ocorreu no nó **4** e em **y** no nó **3**, como também ilustra a Figura 7.

TABELA 5. Deslocamentos e Forças em x e y para a treliça de alumínio.

Nó	Deslocamento em x [m]	Deslocamento em y [m]	Força em x [N]	Força em y [N]
1	0	0	4000	3000
2	0	0	0	2000
3	-0,0002388	-0,00005357	0	-5000
4	-0,0003817	0	-4000	0

Fonte: Autora (2019).

FIGURA 7. Representação da deformação em x e y da treliça de alumínio (a imagem não está na escala real). Fonte: Autora (2019).

O somatório de forças que atuam na estrutura nas direções **x** e **y** é nulo, estando de acordo com a condição de equilíbrio estático. Assim como o deslocamento, as deformações dos elementos, Tabela 6, foram pequenas, sendo o elemento **5** com maior deformação em relação aos demais. A tensão atuando nos elementos **1** e **4** é nula, os elementos **2** e **5** estão sob compressão, **2,5** e **6,25 MPa**, respectivamente. Já o elemento **3** está sob tração de **5 MPa**. Todas as tensões encontram-se abaixo do limite de escoamento do material.

TABELA 6. Tensão e deformação dos elementos da treliça de alumínio.

Elemento	Deformação	Tensão [MPa]
1	0	0
2	-0,00003571	-2,5
3	0,000071429	5
4	0	0
5	0,000089286	-6,25

Fonte: Autora (2019).

Comparando as duas treliças, a treliça de alumínio apresentou maiores deslocamentos nos nós e maiores deformações nos elementos em relação à de aço, conforme esperado. Isso se deve ao fato do módulo de elasticidade do alumínio ser inferior ao do aço e a área da seção transversal, bem como o comprimento das barras, terem sido mantidos constantes. Portanto, para essas condições tem-se que a treliça de aço é mais rígida do que a de alumínio; mas ainda assim, os deslocamentos e deformações para ambas as treliças foram bem pequenos.

Este é um dos casos em que o Método dos Elementos Finitos pode ser aplicado. Treliças com grandes números de nós e elementos podem tornar os cálculos exaustivos sem auxílio de um computador. Programar o Método dos Elementos Finitos possibilita uma grande economia de tempo de cálculo. Também permite solucionar uma vasta gama de problemas mais complexos. Atualmente, vários *softwares* já possuem o MEF implementado, facilitando mais ainda o processo desde que o usuário tenha um bom conhecimento da teoria e aplicação desta ferramenta.

REFERÊNCIAS

BEER, F. P.; JOHNSTON JR, E. R.; MAZUREK, D. F.; EISENBERG, E. R., Vector Mechanics for Engineers: Statics. Ed. McGraw-Hill Companies, New York, 9th ed., 287 p., 2010.

CHRISTOFORO, A. L.; MARCONATO, S. A. S.; OLIVEIRA, R. Z. G. de. Numerical Optimization of the area to the transversal sections for the component structural elements of plain structures of truss type. Rev. Bras. Biom., São Paulo, v.25, n.3, p. 57-69, 2007.

FERREIRA, A. J. M. MATLAB Codes for Finite Element Analysis. Solids and Structures. Springer, 51 p., 2009.

NOGUEIRA, L. G. O.; BEZERRA, E. M. F. Ferramenta em Ambiente Excel para Análise Estrutural de Treliças Espaciais pelo Método dos Elementos Finitos. Proceedings of the XXXVIII Iberian Latin-American Congress on Computational Methods in Engineering, ABMEC, Florianópolis, SC, Brazil, November 5-8, 2017.

NORTON, R. L. Projeto de Máquinas: uma abordagem integrada. Bookman, Porto Alegre, 482 p., 4ª ed., 2013.

OCHSNER, A. Computational Statics and Dynamics. An Introduction Based on the Finite Element Method. Springer, 59 p., 2016.

SILVA, G. N.; SILVESTRE, M. A.; NETO, P. B.; CAVALCANTE, J. P. B. Método dos Elementos Finitos Aplicado a Treliças com Comportamento Dinâmico. Rev. Bras. de Iniciação Científica (RBIC), Itapetininga, v. 6, n.3, p. 66-81, jul/set., 2019.

TURNER, M. J.; CLOUGH, R. W.; MARTIN, H. C.; TOPP, L. J. Stiffness and Deflection Analysis of Complex Structures. J. Aero. Sci., 23, p p. 805-824, 1956.