# Resumo Sobre a Tese Intitulada "The Minimum Labeling Spanning Tree and Related Problems"

**Thiago Gouveia da Silva**
IFPB - Instituto Federal da Paraíba
Avenida 1 de maio, João Pessoa, Paraíba
thiago.gouveia@ifpb.edu.br

**RESUMO**

O objetivo deste relatório é apresentar um resumo conciso sobre a tese de doutorado de Thiago Gouveia da Silva, intitulada "*The Minimum Labeling Spanning Tree and Related Problems*", como requisito para participação no Concurso de Teses do $51^o$ Simpósio Brasileiro de Pesquisa Operacional, a ser realizado em Limeira-SP, 2019.

**PALAVRAS CHAVE. Concurso, Grafos, Árvores.**

**ABSTRACT**

This document presents a resume about the thesis of Thiago Gouveia da Silva, entitled "*The Minimum Labeling Spanning Tree and Related Problems*", as a requirement for participating in the Contest of Thesis of the $51^o$ Brazilian Symposium of Operations Research, to be held at Limeira-SP, 2019.

**KEYWORDS. Contest. Graphs. Trees.**

https://proceedings.science/p/107542?lang=pt-br

## 1. Sobre este Resumo

O objetivo deste relatório é apresentar um resumo conciso sobre a tese de doutorado de Thiago Gouveia da Silva, intitulada "*The Minimum Labeling Spanning Tree and Related Problems*", como requisito para participação no Concurso de Teses do $51^o$ Simpósio Brasileiro de Pesquisa Operacional, a ser realizado em Limeira-SP, 2019.

Para tal, a Seção 2 descreve o autor e os orientadores, com suas respectivas afiliações, assim como as universidades e departamentos nos quais o trabalho foi desenvolvido. A Seção 3 introduz os principais problemas estudados pelo trabalho, assim como a sua relevância para o campo. A Seção 4 discute as contribuições e a originalidade do trabalho, enquanto a Seção 5 apresenta os artigos derivados da tese. Por fim, a Seção 6 apresenta as considerações finais sobre este relatório.

## 2. Desenvolvimento da Tese

Thiago Gouveia é professor efetivo do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia da Paraíba (IFPB), tendo sido liberado de suas atividades para cursar a pós-graduação. O Doutorado foi desenvolvido em um regime de cotutela entre o Instituto de Computação (IC) da Universidade Federal Fluminense (UFF), especificamente no Programa de Pós-Graduação em Computação, e o *Laboratoire d'Informatique* (LI) da Université d'Avignon e des Pays de Vaucluse (UAPV), na França.

Na UFF, o trabalho foi orientado pelo professor Luiz Satoru Ochi[1] (IC/UFF) e coorientado pelo professor Lucídio dos Anjos Formiga Cabral[2] (Departamento de Informática/Universidade Federal da Paraíba). Na UAPV, o trabalho foi orientado pelo professor Philippe Michelon[3] (LI/UAPV) e coorientado pelo professor Serigne Gueye[4] (LI/UAPV).

Durante os dois primeiros anos, o trabalho foi desenvolvido na cidade de Niterói - RJ, na UFF. No ano seguinte, a pesquisa foi efetuada na cidade de Avignon, na França (LI/UAPV), período no qual o aluno recebeu uma bolsa do programa Ciências sem Fronteiras[5]. No último ano, os trabalhos ficaram divididos entre períodos em João Pessoa - PB (DI/UFPB) e Niterói - RJ (UFF). Por fim, a defesa da tese foi realizada na UFF no dia 1 de novembro de 2019.

## 3. Tema da Tese

Define-se um grafo com arestas rotuladas (ELG, do inglês *edge-labeled graph*) como um grafo não orientado simples $G = (V, E, L)$, sendo $V$ o conjunto de vértices, $E$ o conjunto de arestas e $L$ o conjunto de rótulos, de modo que $l(e) \in L$ representa o rótulo associado à aresta $e$, $\forall e \in E$. Neste tipo de estrutura, privilegia-se a modelagem de características qualitativas em vez de quantitativas, uma vez que um mesmo rótulo pode estar presente em diversos pontos do grafo, apresentando um impacto mais global. Nos últimos anos, muita atenção tem sido dada a problemas definidos sobre ELGs. Dentre estes, destaca-se o Problema da Árvore Geradora com Rotulação Mínima (MLSTP, do inglês *minimum labeling spanning tree problem*), que é um problema de otimização combinatória que consiste em encontrar uma árvore de cobertura em um ELG utilizando o menor número de rótulos possível.

O MLSTP pertence à classe NP-difícil e tem atraído bastante atenção em pesquisas nos últimos anos. Por sua vez, o Problema Generalizado da Árvore Geradora com Rotulação Mínima (GMLSTP, do inglês *generalized minimum labeling spanning tree problem*) é uma generalização do

[1] http://lattes.cnpq.br/9171815778534257
[2] http://lattes.cnpq.br/6699185881827288
[3] http://lattes.cnpq.br/6925570277196451
[4] http://lattes.cnpq.br/7566204821919347
[5] Grant No. 207334/2015-3

MLSTP na qual se permite que múltiplos rótulos sejam associados a uma aresta. A Figura 1 exibe um exemplo de grafo com arestas rotuladas usado como entrada para o MLSTP, assim como uma árvore de cobertura com rotulação mínima para este grafo.

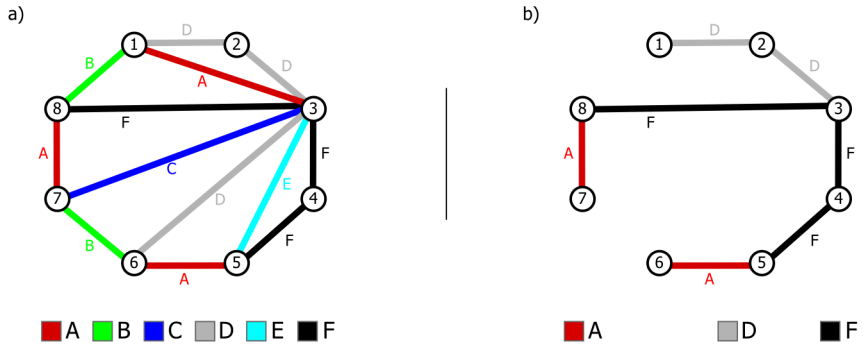



Figura 1: (a) Exemplo de instância para o MLSTP. (b) Solução ótima da instância.

Tanto o MLSTP quanto o GMLSTP possuem aplicações práticas em áreas importantes, como Projeto de Redes de Computadores, Projeto de Redes de Transporte Multimodais e Compactação de Dados. Tais aplicações são discutidas com mais detalhes no Capítulo 1 da tese. Pode-se dizer que o tema central do doutorado foi "problemas de conectividade definidos em grafos com arestas rotuladas", em especial o Problema da Árvore Geradora com Rotulação Mínima e sua versão generalizada.

Problemas de conectividade em grafos com arestas rotuladas possuem bastante relevância na área, tendo sido tema de diversas pesquisas nos últimos anos. Sobre o MLSTP, podemos citar os trabalhos de Chwatal e Raidl [2011], Consoli et al. [2015], Cerrone et al. [2016] e Cerrone et al. [2017]. E sobre outros problemas de conectividade sobre ELGs, podemos citar os trabalhos de Ismkhan [2017], Perez e Consoli [2015], Zhang [2014] e Cerulli et al. [2014]. O Capítulo 8 da Tese apresenta um *survey* completo e interessante acerca de problemas definidos sobre ELGs cujo objetivo subjacente é a conectividade.

## 4. Contribuições

As contribuições da tese em questão podem ser divididas entre teóricas e práticas. Dentre as contribuições teóricas, introduzimos novos conceitos, definições, propriedades e teoremas úteis em relação a grafos com arestas rotuladas, bem como um estudo poliédrico profundo sobre o GMLSTP. Dentre as contribuições práticas, propusemos novas heurísticas — como o algoritmo baseado na metaheurística *Multi-Start Local Branching* (MSLB) e a heurística construtiva *Parameterized Maximum Vertex Cover Algorithm* (pMVCA) — e métodos exatos — como novas formulações matemáticas e algoritmos *branch-and-cut* — para resolver tanto o MLSTP quanto o GMLSTP. Foram realizados experimentos computacionais utilizando conjuntos de instâncias bem estabelecidos na literatura, mostrando que as novas abordagens introduzidas no trabalho alcançaram os melhores resultados para métodos heurísticos e exatos em comparação com estado da arte. Em seguida, descrevemos as maiores contribuições da cada capítulo da tese.

O Capítulo 1 (*Introduction*) descreve os conceitos e definições básicas necessárias para a compreensão do conteúdo que será apresentado. Além disto, este capítulo ilustra algumas das mais importantes aplicações dos problemas estudados.

O Capítulo 2 (*Literature Review*) apresenta uma revisão cuidadosa da literatura sobre o MLSTP e o GMLSTP, descrevendo em detalhes o métodos heurísticos e exatos mais bem sucedidos

para estes problemas. Este capítulo pode ser utilizado como um sólido ponto de partida para quem deseja realizar pesquisas sobre estes problemas.

O Capítulo 3 (*Theoretical Aspects*) introduz novos conceitos e definições a respeito dos grafos com arestas rotuladas, tais como resultados teóricos, regras de redução, limites inferiores e técnicas de transformação que podem ser aplicadas sobre estes grafos. O arcabouço teórico produzido pode ser utilizado em uma vasta gama de problemas, tanto para fomentar métodos de pré-processamento, quanto para prover limites mais fortes para a complexidade de novos algoritmos que venham a ser desenvolvidos. Em especial, o conceito de contração de rótulos foi utilizado para derivar um limite mais forte para a complexidade de tempo da heurística de construção mais famosa para o MLSTP, o MVCA.

O Capítulo 4 (*MIP-Based Exact Methods*) descreve uma nova formulação matemática (denominada CCut) para os problemas. Esta é a primeira a utilizar apenas variáveis de decisão associadas aos rótulos do grafo de entrada. Os resultados computacionais demonstraram que CCut tem desempenho superior ao dos melhores métodos da literatura. Além disto, o conceito de utilizar apenas variáveis para os rótulos pode ser replicado para diversos problemas definidos sobre ELGs, como é demonstrado no Capítulo 8.

O Capítulo 5 (*A Polyhedral Study on CCut Formulation*) apresenta um estudo poliédrico sobre o GMLSTP. O politopo da formulação CCut é definido, são apresentadas novas famílias de desigualdades que definem facetas, e é efetuada uma comparação poliédrica com as melhores formulações da literatura. Mais uma vez, os resultados demonstraram que CCut tem é superior aos melhores métodos exatos da literatura. Vale observar que as provas são apresentadas de forma bem didática e detalhada, tornando este Capítulo um bom ponto apoio para estudos iniciais sobre análises poliédricas. Ademais, algumas provas apresentadas estão longe de ser triviais, tal qual as provas dos Teoremas 5.8 e 5.9.

O capítulo 6 (*Improved Exact Methods*) trata de melhorias propostas para os métodos exatos discutidos no Capítulo 4: uma nova formulação matemática (PCut) é apresentada, assim como algoritmos de *branch-and-cut*. Em especial, é introduzida uma nova estratégia híbrida de ramificação, a qual apresentou resultados muito animadores. Nestes termos, é esperado que o ganho de performance obtido pela utilização desta nova estratégia possa ser replicado em diversos problemas que possuam restrições do tipo *set-covering*.

O Capítulo 7 (*Heuristic Methods*) apresenta novas heurísticas construtivas e de busca local, assim como uma nova meta-heurística (denominada MSLB) híbrida para o GMLSTP, combinando a formulação CCut com as heurísticas propostas. Os resultados computacionais obtidos demonstraram a qualidade do método proposto. O MSLB possui alguns elementos bem originais em sua composição, tal como a utilização de *Local Branching* em níveis como busca local, e o uso de uma parametrização automática bastante agressiva na fase de construção. Tais ideias podem vir a oferecer vários *insights* para o desenvolvimento de novas heurísticas para problemas gerais de otimização.

O Capítulo 8 (*Exact Methods for Connectivity Problems defined on ELGs*) aborda diversos problemas de conectividade definidos sobre ELGs e propõe novas extensões e/ou adaptações da formulação CCut para resolvê-los. A maior contribuição neste capítulo é a apresentação de vários problemas que podem ser investigados, trazendo visibilidade para esta área.

Por fim, os Capítulos 9 (*The Minimum Labeling Global Cut Problem*) e 10 (*The Minimum Representation Spanning Tree Problem*) tratam, respectivamente, dos problemas do corte rotulado global mínimo e do problema da árvore de cobertura com representação mínima. São propostas novas formulações matemáticas e algoritmos de *branch-and-cut* para a solução destes problemas.

Dentre as contribuições destes capítulos, destaca-se, por sua originalidade e simplicidade, a formulação baseada em eliminação de árvores. Apesar de esta formulação não ter obtido os melhores resultados, esta merece um pouco mais de investigação por conta de seu potencial de ser aplicada em vários outros problemas definidos em ELGs.

## 5. Publicações

Esta seção enumera os trabalhos que foram publicados como subproduto da pesquisa realizada para o desenvolvimento da tese, assim como os trabalhos que estão em fase final de produção. Adicionalmente, apresentamos a síntese dos trabalhos mais importantes resultantes da Tese.

### 5.1. Artigos publicados em periódicos

★ Silva T. G. et al. A hybrid metaheuristic for the minimum labeling spanning tree problem, *European Journal of Operational Research* (EJOR) 2018.

Este artigo introduz os conceitos de contração de rótulos e de projeção entre grafos contraídos, apresenta uma versão revisada do MVCA e prova que esta nova versão possui melhor complexidade. Adicionalmente, propõe uma nova meta-heurística híbrida para o MLSTP, combinando a eficiência das novas heurísticas construtivas propostas com a capacidade de exploração propiciada pela heurística de busca local que utiliza uma técnica de *local branching* sobre a formulação CCut. Os experimentos computacionais demonstram que a nova meta-heurística proposta possui desempenho superior em comparação aos melhores métodos da literatura, tanto em respeito à qualidade das soluções produzidas quanto em ao tempo de processamento.

★ Silva T. G. et al., A polyhedral approach to the generalized minimum labeling spanning tree problem, *EURO Journal on Computational Optimization* (EJCO) 2017.

Este artigo demonstra como o GMLSTP pode ser expressado como uma versão do MLSTP usando multigrafos, propõe uma nova formulação matemática para o GMLSTP, denominada CCUT, e analisa o politopo associado a esta formulação. Para tal, introduz novos conceitos relacionados aos ELGs, prova que o politopo definido pela formulação CCut possui dimensão cheia e descreve cinco famílias de desigualdades que definem facetas. Além disto, realiza comparações poliédricas entre o politopo da formulação CCut e os politopos das melhores formulações da literatura, mostrando que o novo modelo proposto é teoricamente superior aos anteriores.

★ Bordini A. et al. New algorithms for the minimum coloring cut problem, *International Transactions in Operational Research* (ITOR) 2017.

Este trabalho apresenta duas abordagens heurísticas baseadas no arcabouço VNS (*Variable Neighborhood Search*) para a resolução do problema do Corte Rotulado Global Mínimo, uma denominada gulosa e outra probabilística. A diferença entre as duas abordagens é que a versão probabilística baseia as suas escolhas aleatórias na função de Boltzmann, tal qual a meta-heurística *Simulated Annealing*. Ambos algoritmos propostos foram capazes de encontrar todas as soluções ótimas descritas na literatura, contudo, a versão probabilística do algoritmo obteve uma performance levemente superior.

### 5.2. Artigos publicados em conferências e simpósios

- Silva T. G. et al. Abordagem Híbrida para o Problema da Arvore Geradora com Rotulacão Mínima, SBPO 2014.

- Silva T. G. et al. Novos Ótimos para o Problema da Árvore Geradora com Rotulacão Mínima, SBPO 2015.

- Silva T. G. et al. Métodos Exatos Aplicados ao Problema do Corte Global Rotulado Mínimo, SBPO 2016.

- Silva T. G. et al. Efficient heuristics for the minimum labeling global cut problem, VNS Conference 2017, ENDM 2018.

- Linares E. D. Z. et al. The Minimum Representation Spanning Tree Problem, SBPO 2018, EURO/ALIO 2018.

### 5.3. Artigos submetidos

- Silva T. G. et al. Meta-heurísticas aplicadas ao problema do diâmetro em grafos com arestas rotuladas, submetido para o SBPO 2019.

- Medeiros, J. F. R, Silva T. G., e Sousa Filho, G. F. Formulação baseada em fechos cromáticos para o problema do corte global rotulado mínimo, submetido para o SBPO 2019.

### 5.4. Artigos em etapa final de produção

- Silva T. G. et al. Solving the minimum labeling global cut problem by mathematical programming. Provavelmente será submetido à revista Networks em 2019, contendo as contribuições apresentadas no Capítulo 9 da Tese. Pré-print disponível online em "arxiv.org/abs/1903.04319".

- Silva T. G. et al. Advances on exact methods for the GMLSTP. Provavelmente será submetido à revista *Discrete Applied Mathematics* (DAM) em 2019, contendo as contribuições apresentadas nos Capítulos 4 e 6 da Tese.

## 6. Considerações Finais

O presente relatório apresentou um resumo sobre a tese intitulada "*The Minimum Labeling Spanning Tree and Related Problems*", desenvolvida por Thiago Gouveia da Silva, orientada pelos professores Luiz Satoru Ochi e Philippe Michelon, e coorientada pelos professores Luídio Cabral e Serigne Gueye.

Acreditamos que o trabalho apresenta contribuições relevantes para a área, como novas abordagens para a resolução exata e heurística de problemas definidos sobre grafos com arestas rotuladas, assim como novas definições e teoremas. Adicionalmente, esta tese tem um forte potencial como ponto de início de novas pesquisas relacionadas ao tema, dado o grande número de problemas relacionados e variantes discutidos.

Por fim, vale destacar que o trabalho se sobressai pela didática com a qual detalha temas complexos (como o estudo poliédrico realizado), pelos resultados práticos alcançados (tendo superado o estado da arte entre os métodos heurísticos, exatos e poliédricos) para o problema, e pelas publicações relevantes que propiciou.

https://proceedings.science/p/107542?lang=pt-br

## Referências

Cerrone, C., Cerulli, R., e Gaudioso, M. (2016). Omega one multi ethnic genetic approach. *Optimization Letters*, 10(2):309–324.

Cerrone, C., Cerulli, R., e Golden, B. (2017). Carousel greedy: a generalized greedy algorithm with applications in optimization. *Computers & Operations Research*, 85:97–112.

Cerulli, R., Fink, A., Gentili, M., e Raiconi, A. (2014). The k-labeled spanning forest problem. *Procedia - Social and Behavioral Sciences*, 108:153–163. URL http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1877042813054682.

Chwatal, A. M. e Raidl, G. R. (2011). Solving the minimum label spanning tree problem by mathematical programming techniques. *Adv. Operations Research*, 2011. URL http://dblp.uni-trier.de/db/journals/advor/advor2011.html#ChwatalR11.

Consoli, S., Mladenović, N., e Moreno Pérez, J. (2015). Solving the minimum labelling spanning tree problem by intelligent optimization. *Appl. Soft Comput.*, 28(C):440–452. ISSN 1568-4946. URL http://dx.doi.org/10.1016/j.asoc.2014.12.020.

Ismkhan, H. (2017). Effective three-phase evolutionary algorithm to handle the large-scale colorful traveling salesman problem. *Expert Systems with Applications*, 67:148–162.

Perez, J. e Consoli, S. (2015). On the minimum labelling spanning bi-connected subgraph problem. *Annals of MIC 2015: The XI Metaheuristics International Conference, arXiv preprint arXiv:1505.01742*.

Zhang, P. (2014). Efficient algorithms for the label cut problems. In *Theory and Applications of Models of Computation*, p. 259–270. Springer.