

Otimização Robusta aplicada ao Roteamento de Veículos: formulações e estudo de um caso real

Rafael Ajudarte de Campos e Pedro Munari

Departamento de Engenharia de Produção, Universidade Federal de São Carlos

Rodovia Washington Luís, s/n, São Carlos - SP, 13565-905

rafael.ajudarte.campos@gmail.com

munari@dep.ufscar.br

RESUMO

Neste trabalho, apresentam-se as principais atividades e resultados obtidos nos estudos relacionados ao Problema de Roteamento de Veículos (PRV) sob incertezas, em particular com o uso da Otimização Robusta (OR). Neste, comparou-se modelos da literatura para PRV determinístico com Capacidade e também com Janelas de Tempo. Ademais, comparou-se modelos de OR recentes da literatura para, então, propor uma extensão daquele mais apropriado para fornecer apoio à tomada de decisão em um caso real de uma empresa de transporte aéreo sob demanda. O modelo resultante, além de considerar os requisitos operacionais específicos do caso em estudo, incorpora também as incertezas inerentes aos tempos de viagem. Experimentos computacionais, realizados com dados de um mês de operação da empresa, apresentaram bons tempos computacionais e demonstram os benefícios da adoção da abordagem robusta. Foi possível verificar, com o uso da Simulação de Monte Carlo, uma redução de riscos significativa nas soluções robustas.

PALAVRAS CHAVE. Roteamento de Aeronaves, Problema de Roteamento de Veículos, Otimização Robusta.

L&T - Logística e Transportes, PM - Programação Matemática,

ABSTRACT

In this paper, we address the main activities and results obtained by the studies related to the Vehicle Routing Problem (VRP) under uncertainty, particularly using Robust Optimization (RO). We compared models from the literature for the deterministic VRP with Capacity and with Time Windows as well. We also compared RO models from recent literature, and then propose an extension based on the most appropriate to provide support in the decision making for a real-world case faced by an airline company that offers on-demand flights for passenger transportation. The resulting model considers specific operational requirements for the studied case, as well as incorporates the inherent uncertainties of travel times. Computational experiments, executed with data obtained from one-month operation of the company, indicate the benefits of adopting the RO. By using Monte Carlo Simulation we could verify a significant reduction in the risks related to the robust solutions.

KEYWORDS. Aircraft Routing, Vehicle Routing Problem, Robust Optimization.

Logistics and Transportation, Mathematical Programming

1. Introdução

O Problema de Roteamento de Veículos (PRV) é um problema clássico da Pesquisa Operacional que tem grande relevância prática e teórica [Toth e Vigo, 2014]. Neste tipo de problema, há um conjunto de veículos que devem atender um conjunto de nós clientes, seja para a entrega de algum produto ou fornecimento de algum serviço. Existe um elevado número de variantes para o problema, como o PRV com Capacidade (PRVC) e o PRV com Janelas de Tempo (PRVJT), sendo estes os mais relevantes para este projeto. A primeira consiste na restrição de capacidade do veículo, que pode carregar até uma quantidade limite de produtos aos clientes não podendo exceder tal valor, já a segunda considera, além das restrições do PRVC, a existência de janelas de tempo de serviço. Nesta, o serviço pode ser executado somente dentro da janela de tempo, devendo esperar caso o veículo chegue antes do horário mínimo e falhando caso chegue após o horário máximo.

Apesar da pesquisa bastante ativa na área, poucos trabalhos abordando o PRV têm tratado a incerteza inerente a dados de entrada, fazendo com que, em diversos contextos, as soluções obtidas não sejam de fato viáveis na prática [Ordonez, 2010]. A Otimização Robusta (OR) é uma das técnicas que permitem incorporar incertezas aos problemas de otimização, de forma que as soluções sejam protegidas contra variações nos dados, aumentando assim as chances de serem de fato viáveis. Esta técnica consiste na otimização do pior caso possível em relação aos parâmetros incertos, com intuito de se proteger desta situação em detrimento de aumento dos custos nas situações normais. Cabe, então, ao tomador de decisão decidir se a troca de economia por segurança é válida [Ben-Tal e Nemirovski, 1999].

O objetivo deste trabalho é apresentar os estudos e resultados desenvolvidos pelo discente durante sua Iniciação Científica. Nestes, implementou-se modelos clássicos e recentes da literatura para o PRVC e, em seguida, adaptou-os para o caso do PRVJT a partir de restrições do tipo Miller, Tucker e Zemlin (MTZ). Em seguida, os modelos implementados foram comparados a partir de instâncias da literatura [Augerat, 1995; Beasley e Christofides, 1989; Solomon, 1987]. Do mesmo modo, implementou-se modelos recentes de OR [Agra et al., 2012; Gounaris et al., 2013; Munari et al., 2018] em instâncias adaptadas da literatura. Estas etapas iniciais foram usadas como preparação para a maior contribuição deste trabalho: o desenvolvimento de uma contraparte robusta para o modelo determinístico proposto por Munari e Álvarez [2019], que aborda um PRVJT com frota heterogênea em um caso real envolvendo de transporte aéreo sob demanda.

O restante deste artigo é estruturado da seguinte forma. Na Seção 2, apresenta-se os métodos e resultados dos estudos iniciais comparativos da literatura. O modelo de OR para o caso estudado e seus resultados são apresentados na Seção 3. Por fim, na seção 4, as considerações finais e perspectivas de trabalho futuro são apresentadas.

2. Estudos Preliminares

Nesta seção, são apresentados os estudos desenvolvidos pelo discente nas etapas iniciais da Iniciação Científica, e também discute-se os principais desafios enfrentados e resultados encontrados. Na Subseção 2.1 serão apresentados os estudos referentes aos modelos determinísticos enquanto na Subseção 2.2 serão apresentados àqueles referentes aos modelos robustos.

2.1. Modelos Determinísticos

Esta etapa inicial foi importante não somente para a familiarização do discente com os modelos clássicos de roteamento de veículos, cujo entendimento foi vital para a implementação das etapas posteriores do projeto, mas também com a modelagem linear e programação para tratamento de dados, conteúdos visto com menor profundidade na graduação. Inicialmente, estudou-se modelos do PRVC sem restrições de janela de tempo. Analisou-se, primeiramente, os modelos tradicionais de 3 índices, o de 2 índices e o de Fluxo de Commodities Simples (FCS), proposto

por Gavish e Graves [1978], e comparou-os com todos os seis modelos de Múltiplas Commodities (MCF) proposto por Letchford e Salazar-González [2015]. Usou-se ao todo 15 instâncias de PRVC da literatura, sendo 5 delas do benchmark de Augerat [1995] e o restante do benchmark de Beasley e Christofides [1989]. Os testes foram efetuados na ferramenta IBM CPLEX Optimization Studio v. 12.7 em um computador com processador Intel(R) Core(TM) i5-3230M CPU @ 2.60 GHz e 4,00 GB de RAM. Em seguida, adaptou-se todos os modelos estudados, para estes considerarem restrições de janela de tempo. Para isto, optou-se por adicionar restrições do tipo MTZ em cada um dos modelos. Após a adaptação de cada modelo, usou-se as 3 primeiras instâncias de classe C, R e RC do *benchmark* de Solomon [1987] para 25, 50 e 100 clientes. Com os resultados, concluiu-se que o modelo mais apto, em geral, para a solução dos problemas estudados foi o FCS. Este apresentou um maior número de instâncias completadas à otimalidade no tempo determinado de até 3600s, além de menores tempos computacionais e gaps, a diferença porcentual entre o melhor limitante que o CPLEX conseguiu e o valor da solução inteira apresentada é definido, médios. Outros modelos que merecem destaque positivo é o MCF1a, proposto por Letchford e Salazar-González [2015], que apresentou o segundo melhor desempenho para as instâncias do PRVC, e o de 2 índices, o segundo melhor para o PRVJT. Verificou-se também as afirmações de Letchford e Salazar-González [2015] quanto ao domínio da relaxação linear entre os modelos propostos. Notou-se também que uma relaxação linear de melhor qualidade não necessariamente implica em melhores tempos de processamento.

2.2. Modelos Robustos

Esta etapa de estudo teve duas finalidades principais: compreensão dos principais métodos para obtenção de modelos de OR e seleção daquele que apresentar melhores resultados para atuar com base na modelagem do caso aplicado. Foram estudados os modelos propostos por Agra et al. [2012], Gounaris et al. [2013] e Munari et al. [2018]. Os primeiros dois artigos usam a abordagem de dualização das restrições que contenham o parâmetro incerto, sendo que Agra et al. [2012] usa uma estrutura de grafos em camadas e Gounaris et al. [2013] usa restrições MTZ. Já o modelo de Munari et al. [2018] usa uma abordagem baseada na linearização de equações recursivas baseadas em programação dinâmica para modelar o comportamento de pior caso dos parâmetros incertos.

Para comparar os modelos, desenvolveu-se instâncias adaptadas, baseadas nas de Solomon [1987] previamente usadas na análise dos modelos determinísticos. Cada instância tem um parâmetro adicional que indica a variabilidade máxima para a demanda e para o tempo de viagem nominal. Cada um destes parâmetros pode variar 0%, 10%, 25% ou 50% sendo que ou apenas um deles varia e o outro permanece constante ou ambos variam com mesma intensidade. Deste modo, cada instância original de Solomon [1987] gerou outras nove para serem verificadas em cada modelo.

É interessante notar alguns desafios apresentados na implementação dos modelos estudados. O modelo Agra et al. [2012] precisou ser adaptado para considerar restrições de capacidade. Além disto, criou-se um modelo de otimização linear inteira para minimizar o número de camadas que seriam usadas em cada instância, visto que um número excessivo aumenta vertiginosamente o tempo computacional. Foi necessário também adaptar o modelo genérico proposto por Gounaris et al. [2013] para o conjunto de incertezas, que exigiu um aprendizado mais profundo em dualização de restrições robustas como visto em Bertsimas e Sim [2003].

Após a implementação dos modelos, em um computador de processador Intel(R) Core(TM) i7-4790 CPU @ 3.60 GHz e com 16 GB de RAM, usando o *software* IBM CPLEX Optimization Studio v. 12.7, verificou-se que o modelo proposto por Munari et al. [2018] foi o que melhor apresentou resultado em todas instâncias averiguadas, com melhor taxa de soluções ótimas no prazo de

3600s e menores *gaps* médios. Isto vai de encontro com a conclusão dos autores do artigo, que notam que o modelo apresenta um menor número de variáveis e restrições se comparado com modelos que aplicam a dualização e, portanto, tende a ser mais eficiente computacionalmente. Deste modo, optou-se por usar a abordagem apresentada em Munari et al. [2018] para o desenvolvimento do modelo robusto para o caso real.

3. Modelo de Roteamento de Aeronaves Robusto

Nesta seção são apresentados os detalhes para o desenvolvimento do modelo aplicado a um caso real de uma empresa de transporte aéreo. Na Subseção 3.1 faz-se a caracterização geral do problema e do modelo determinístico o qual o modelo robusto se baseia. O modelo robusto é mostrado na Subseção 3.2. Na Subseção 3.3 os resultados do modelo para instâncias reais são apresentados.

3.1. Caracterização do problema e formulação determinística

A empresa para qual tanto o modelo determinístico de base proposto por Munari e Álvarez [2019] quanto o modelo robusto do atual projeto foram desenvolvidos é uma companhia de transporte aéreo de passageiros sob demanda, mais especificamente em serviços de posse fracionada. Neste tipo de contrato, o cliente adquire uma parcela de uma aeronave, pagando uma fração de seu valor e uma taxa de manutenção mensal, o que lhe confere direito a um determinado número de horas de vôos anuais em uma aeronave similar ou melhor à contratada, o que torna necessário uma modelagem que considera frota heterogênea. Neste tipo de serviço o cliente avisa, com um determinado tempo de antecedência, a rota desejada e uma aeronave compatível deverá estar disponível no aeroporto no horário combinado, de modo que o modelo também deve considerar janelas de tempo para as requisições. Além de requisições de clientes, as aeronaves têm requisições referentes a manutenção, consideradas também no modelo. Este último tipo de requisição tende a ter janelas de tempo mais abrangentes que as de atendimento a clientes. Uma característica interessante do modelo é que ao invés de usar uma representação tradicional em que os aeroportos são os nós e as variáveis de decisão determinam os arcos escolhidos [Letchford e Salazar-González, 2015; Desaulniers et al., 2014], opta-se por usar as requisições como nós e as variáveis de decisão determinam a ordem que estas são executadas. Esta abordagem, de acordo com Munari e Álvarez [2019], resultou em melhores resultados computacionais para o caso estudado.

3.2. Modelagem Robusta

O modelo é construído a partir de um conjunto V de aeronaves, segmentadas em um conjunto de P tipos ordenados. As requisições são representadas pelo conjunto R , sendo este a união da requisição *dummy* 0 com o conjunto de requisições de manutenção M e o conjunto de requisições de clientes L . Γ é o *budget* de incerteza, que representa o número de piores casos simultâneos máximos, no caso as viagens que demoram seu tempo máximo, que o modelo protege.

Já os parâmetros relevantes para o modelo são C_{vrs} , entendido como o custo de reposicionamento da aeronave v da requisição r para a requisição s ; T_{ij}^p , o tempo de viagem entre os aeroportos i e j ; \hat{T}_{ij}^p é a variabilidade máxima do tempo de viagem entre os aeroportos i e j ; AV_v é o momento exato que a aeronave $v \in V$ ficará disponível para o horizonte de planejamento e k_v é o aeroporto inicial da aeronave v ; $t_v \in P$ é o tipo da aeronave v ; TAT_k^r é o tempo que a aeronave leva no aeroporto por questões como o embarque de passageiros e taxiamento; ST_r é o horário de início da requisição r ; Δ_L e Δ_M apresentam o máximo que se pode adiantar ou atrasar o atendimento da requisição do cliente ou da manutenção, respectivamente; i_r e j_r representa os aeroportos de origem e destino, respectivamente, da requisição r ; p_r é o tipo de aeronave requerida para a requisição r ; TL_r é o tempo de manutenção da requisição $r \in M$. As variáveis de decisão do problema são

y_{vrs} , uma variável binária que assume valor 1 se, e somente se, a aeronave v executa a requisição s , imediatamente após executar a requisição r ; e $w_{r\gamma}$, uma variável contínua que representa o horário mais cedo que a requisição r poderá ser executada quando se considera γ piores casos simultâneos. O modelo é então dado por:

$$\min \sum_{v \in V} \sum_{r \in R} \sum_{s \in R} C_{vrs} y_{vrs} \quad (1)$$

$$\text{s.a } \sum_{\substack{p \in P \\ p \geq p_r}} \sum_{v \in V_p} \sum_{\substack{s \in R \\ s \neq r}} y_{vrs} = 1, \quad r \in L, \quad (2)$$

$$\sum_{\substack{s \in R \\ s \neq r}} y_{vrs} = 1, \quad r \in M, v \in V, \quad (3)$$

$$\sum_{\substack{s \in R \\ s \neq r}} y_{vrs} = \sum_{\substack{s \in R \\ s \neq r}} y_{vsr}, \quad v \in V, r \in R, r > 0, \quad (4)$$

$$\sum_{s \in R} y_{v0s} = 1 = \sum_{r \in R} y_{vr0}, \quad v \in V \quad (5)$$

$$ST_r \leq w_{r\gamma} \leq ST_r + \Delta_L, \quad r \in L, \gamma \leq \Gamma, \quad (6)$$

$$ST_r - \Delta_M \leq w_{r\gamma} \leq ST_r + \Delta_M, \quad r \in M, \gamma \leq \Gamma, \quad (7)$$

$$w_{s\gamma} \geq w_{r\gamma} + \sum_{v \in V} (T_{i_r j_r}^{pr} + TAT_{j_r}^r + T_{j_r i_s}^{ps} + TAT_{i_s}^s) y_{vrs} + M_{rs}^1 \left(\sum_{v \in V} y_{vrs} - 1 \right), \quad r \in L, s \in R, r \neq s, s > 0, j_r \neq i_s, \gamma \leq \Gamma \quad (8)$$

$$w_{s\gamma} \geq w_{r(\gamma-1)} + \sum_{v \in V} (T_{i_r j_r}^{pr} + \hat{T}_{i_r j_r}^{pr} + TAT_{j_r}^r + T_{j_r i_s}^{ps} + TAT_{i_s}^s) y_{vrs} + M_{rs}^1 \left(\sum_{v \in V} y_{vrs} - 1 \right), \quad r \in L, s \in R, r \neq s, s > 0, j_r \neq i_s, 0 < \gamma \leq \Gamma \quad (9)$$

$$w_{s\gamma} \geq w_{r(\gamma-1)} + \sum_{v \in V} (T_{i_r j_r}^{pr} + TAT_{j_r}^r + T_{j_r i_s}^{ps} + \hat{T}_{j_r i_s}^{ps} + TAT_{i_s}^s) y_{vrs} + M_{rs}^1 \left(\sum_{v \in V} y_{vrs} - 1 \right), \quad r \in L, s \in R, r \neq s, s > 0, j_r \neq i_s, 0 < \gamma \leq \Gamma \quad (10)$$

$$w_{s\gamma} \geq w_{r(\gamma-2)} + \sum_{v \in V} (T_{i_r j_r}^{pr} + \hat{T}_{i_r j_r}^{pr} + TAT_{j_r}^r + T_{j_r i_s}^{ps} + \hat{T}_{j_r i_s}^{ps} + TAT_{i_s}^s) y_{vrs} + M_{rs}^1 \left(\sum_{v \in V} y_{vrs} - 1 \right), \quad r \in L, s \in R, r \neq s, s > 0, j_r \neq i_s, 1 < \gamma \leq \Gamma. \quad (11)$$

$$w_{s\gamma} \geq w_{r\gamma} + \sum_{v \in V} (T_{i_r j_r}^{pr} + TAT_{j_s}^{rs}) y_{vrs} + M_{rs}^2 \left(\sum_{v \in V} y_{vrs} - 1 \right), \quad r \in L, s \in R, r \neq s, s > 0, j_r = i_s, \gamma \leq \Gamma, \quad (12)$$

$$w_{s\gamma} \geq w_{r(\gamma-1)} + \sum_{v \in V} (T_{i_r j_r}^{pr} + \hat{T}_{i_r j_r}^{pr} + TAT_{j_s}^{rs}) y_{vrs} + M_{rs}^2 \left(\sum_{v \in V} y_{vrs} - 1 \right), \quad r \in L, s \in R, r \neq s, s > 0, j_r = i_s, 0 < \gamma \leq \Gamma, \quad (13)$$

$$w_{s\gamma} \geq (AV_v + T_{k_v i_s}^{tv} + \hat{T}_{k_v i_s}^{tv} + TAT_{i_s}^s) y_{v0s}, \quad s \in L, v \in V, k_v \neq i_s, \gamma \leq \Gamma, \quad (14)$$

$$w_{s\gamma} \geq (AV_v + TAT_{i_s}^s) y_{v0s}, \quad s \in L, v \in V, k_v = i_s, \gamma \leq \Gamma, \quad (15)$$

$$w_{s\gamma} \geq w_{r\gamma} + TL_r + T_{j_r i_s}^{pr} + TAT_{i_s}^s + M_r^3 (y_{v,rs} - 1), \quad r \in M, s \in R, r \neq s, s > 0, j_r \neq i_s, \gamma \leq \Gamma, \quad (16)$$

$$w_{s\gamma} \geq w_{r(\gamma-1)} + TL_r + T_{j_r i_s}^{pr} + \hat{T}_{j_r i_s}^{pr} + TAT_{i_s}^s + M_r^3 (y_{v,rs} - 1), \quad r \in M, s \in R, r \neq s, s > 0, j_r \neq i_s, 0 < \gamma \leq \Gamma \quad (17)$$

$$w_{s\gamma} \geq w_{r\gamma} + TAT_{i_s}^s + M_r^4 (y_{v,rs} - 1),$$

$$\begin{aligned}
 w_{s\gamma} &\geq (AV_{v_s} + T_{k_{v_s} i_s}^{p_s})y_{v_s 0s}, & r \in M, s \in R, r \neq s, s > 0, j_r = i_s, \gamma \leq \Gamma, & (18) \\
 w_{s\gamma} &\geq (AV_{v_s} + T_{k_{v_s} i_s}^{p_s} + \hat{T}_{k_{v_s} i_s}^{p_s})y_{v_s 0s}, & s \in M, k_{v_s} \neq i_s, \gamma \leq \Gamma, & (19) \\
 w_{s\gamma} &\geq y_{v_s 0s} AV_{v_s}, & s \in M, k_{v_s} \neq i_s, 0 < \gamma \leq \Gamma & (20) \\
 w_{r\gamma} &\geq 0, & s \in M, k_{v_s} = i_s, \gamma \leq \Gamma & (21) \\
 y_{vrs} &\in \{0, 1\}, & r \in R, \gamma \leq \Gamma. & (22) \\
 & & v \in V, s, r \in R & (23)
 \end{aligned}$$

A função objetivo (1) visa minimizar os custos de reposicionamento das aeronaves, aqueles que incorrem quando a aeronave viaja sem passageiros, uma vez que os custos das viagens demandadas pelos clientes são obrigatórios. As restrições (2)-(4) garantem o atendimento das requisições e o sequenciamento dos voos de cada aeronave. As restrições (5) determinam que toda aeronave deve partir e retornar para a requisição *dummy*. Já as restrições (6) e (7) garantem o respeito às janelas de tempo de requisições de clientes e de manutenção, respectivamente. As restrições (8)-(11) efetuam o cálculo, de maneira recursiva, do tempo mínimo para se iniciar uma requisição de cliente s para cada γ quando se necessita de reposicionamento. Estas restrições exemplificam o funcionamento da abordagem robusta de Munari et al. [2018], em que cada restrição calcula $w_{s\gamma}$ para averiguar o maior resultado possível dentro do *budget* de incerteza: usar os γ piores casos e o tempo de viagem nominal para ambas viagens (8), usar os $\gamma - 1$ piores casos e considerar atraso somente na viagem da requisição (9), usar os $\gamma - 1$ piores casos e considerar atraso somente na viagem da requisição (10) ou usar os $\gamma - 2$ piores casos e considerar atraso em ambas viagens (11). (12) e (13) são análogos a (8) e (9), mas referem-se a requisições de clientes que não precisam de viagens de reposicionamento. As restrições (14)-(15) referem-se aos cálculos do tempo de início para a primeira requisição de clientes no horizonte de planejamento. As requisições de manutenção são contempladas, de maneira análoga às restrições (8)-(15), em (16)-(21). O domínio das variáveis é determinado pelas restrições (22) e (23).

3.3. Resultados Computacionais

Nesta subseção, são apresentados os resultados computacionais do modelo robusto desenvolvido. Os testes foram executados para instâncias adaptadas equivalentes a um mês de operações normais da empresa, o terceiro mês proposto por Munari e Álvarez [2019], em um computador com processador Intel Core i7-4790 CPU 3.60 GHz e com 16 GB de memória RAM, usando o *software* gratuito GLPK 4.32. O uso de um *software* gratuito se deve, principalmente, à aproximação com o contexto real em que a empresa optou por não investir na licença de algum *software* comercial.

Estas foram, então, adaptadas para considerar variabilidade no tempo de viagem, a partir da criação de um parâmetro que representa a variação máxima possível do tempo para cada viagem. De maneira arbitrária, escolheu-se uma variabilidade máxima de 10%, 25% e 50% em relação ao valor nominal. Os testes foram efetuados para cada instância robusta aplicada considerando um número máximo de piores casos, Γ , em 0, 1, 5 e 10. Os resultados médios das instâncias encontram-se na Tabela 1. Nesta, *SI* representa o valor das soluções inteiras encontradas, "Tempo" representa o tempo, em segundos, que o GLPK levou para processar cada instância, sendo que todas foram solucionadas à otimalidade no prazo de 3600s estipulado, e *PdR* é o preço da robustez, dado em porcentagem, entendido como o custo adicional que a instância robusta tem em relação à determinística. Para se avaliar o risco destas soluções na prática, realizou-se experimentos usando a Simulação de Monte Carlo. Para realizar a simulação, 1000 amostras diferentes e uniformemente distribuídas de cada instância foram geradas para cada variabilidade e, em seguida, verificou-se se a solução robusta resolvia a instância sem violar as exigências das janelas de tempo para qualquer

requisição. Os resultados encontram-se na coluna *Risco* na Tabela 1, que representa a porcentagem média de falhas que os modelos apresentaram para cada Γ em cada variabilidade.

Tabela 1: Resultado médio para um mês de dados com variabilidade de 10%, 25% e 50%

Γ	10%				25%				50%			
	SI	PdR	Tempo(s)	Risco(%)	SI	PdR	Tempo(s)	Risco(%)	SI	PdR	Tempo(s)	Risco(%)
0	162.726,8	-	2,58	1,6%	162.726,8	-	2,58	100%	162.726,8	-	2,58	100%
1	165.904,7	1,95%	2,71	0,3%	284.251,8	74,68%	2,71	0,9%	296.077,2	81,95%	2,80	34,2%
5	167.238,0	2,77%	2,74	0,0%	284.251,8	74,68%	2,82	0,9%	312.577,8	92,09%	2,76	0,9%
10	167.238,0	2,77%	2,88	0,0%	292.156,8	79,54%	2,89	0,0%	312.577,8	92,09%	2,82	0,9%

É perceptível, pelos resultados da Tabela 1, que para uma mesma variabilidade, os custos tendem a aumentar com o aumento de Γ . Em contrapartida, os riscos tendem a diminuir de forma significativa. Por exemplo, com uma variabilidade de 25%, os custos tendem a aumentar em 74,68% em relação ao resultado determinístico para $\Gamma = 1$ e $\Gamma = 5$ e 79,54% para $\Gamma = 10$. Apesar do aumento elevado dos custos da solução, nota-se que a solução determinística foi incapaz de resolver qualquer amostra sem violar as restrições de janela de tempo, o que pode ser prejudicial para a imagem da empresa e pode levar a elevadas multas. Deste modo, as soluções robustas, com riscos entre 0 e 0,9% passam a ser bastante relevantes. Cabe, então, ao tomador de decisão optar por um nível de serviço que não seja excessivamente conservador, incorrendo em custos desnecessários, nem que desconsidere a variabilidade, resultando em falhas excessivas.

Um ponto positivo do modelo empregado é a eficiência computacional, considerada bastante adequada para o uso na situação real, visto que, em média, as instâncias levaram menos de 3 segundos para serem completadas. Considerando que as instâncias estudadas apresentam, em média, 25 veículos e 45 requisições, os resultados são interessantes inclusive para a literatura. É interessante notar a forte itensidade que os custos aumentam com o aumento da variabilidade, fruto de maiores riscos de atraso e portanto um menor número de requisições que cada aeronave poderá cumprir de forma que as rotas se tornam mais onerosas, porém mais seguras.

4. Considerações finais

Este trabalho apresentou os estudos efetuados no período de um ano de iniciação científica pelo discente. Nas etapas iniciais do projeto, com o intuito de familiarizar o aluno com as ferramentas e conceitos que seriam abordados mais a frente, foi desenvolvido um estudo comparativo entre modelos tradicionais do PRVC determinístico e outros mais recentes que foram posteriormente adaptados para o caso de PRVJT. Em seguida, comparou-se modelos de OR da literatura recente para determinar a melhor abordagem para o desenvolvimento de um modelo que incorporasse incertezas em relação a tempo de viagens, a partir de uma abordagem de OR, aplicado a um caso real, a principal contribuição deste trabalho.

As soluções ótimas do modelo foram, inclusive, obtidas com uma elevada velocidade computacional por meio de software de otimização de propósito geral, gratuito e de código livre. Fez-se também o uso da Simulação de Monte Carlo para se avaliar os riscos das soluções obtidas, o que demonstrou a relevância da OR para solução de problemas reais. É importante destacar que coube ao aluno Rafael a criação e implementação deste modelo adaptado, além da adaptação das instâncias determinísticas, o desenvolvimento das amostras das simulações e análise dos resultados do modelo. Como perspectiva para trabalho futuro, pretende-se realizar experimentos considerando a possibilidade de *upgrade* no atendimento de clientes, além do uso de instâncias de maior porte. Pretende-se também incluir decisões de alocação de tripulação no modelo, algo visto como crítico pela empresa parceira do projeto.

Agradecimentos

Os autores agradecem o apoio financeiro da Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo (FAPESP), processos 2018/00463-4 , 2016/01860-1 e 2013/07375-0; do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq) e da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES).

Referências

- Agra, A., Christiansen, M., Figueiredo, R., Magnus Hvattum, L., Poss, M., e Requejo, C. (2012). *Layered Formulation for the Robust Vehicle Routing Problem with Time Windows*, p. 249–260. Springer Berlin Heidelberg, Berlin, Heidelberg. ISBN 978-3-642-32147-4.
- Augerat, P. (1995). *Approche polyedre du probleme de tournées de vehicules*. PhD thesis, Institut National Polytechnique de Grenoble.
- Beasley, J. E. e Christofides, N. (1989). An algorithm for the resource constrained shortest path problem. *Networks*, 19(4):379–394.
- Ben-Tal, A. e Nemirovski, A. (1999). Robust solutions of uncertain linear programming. *Operations Research Letters*, 25:1–13.
- Bertsimas, D. e Sim, M. (2003). Robust discrete optimization and network flows. *Mathematical Programming*, 98(1):49–71. ISSN 0025-5610.
- Desaulniers, G., Madsen, O. B., e Ropke, S. (2014). The vehicle routing problem with time windows. In Toth, P. e Vigo, D., editors, *Vehicle routing: Problems, methods, and applications*, MOS/SIAM Ser Optim, p. 119–159.
- Gavish, B. e Graves, S. (1978). The traveling salesman problem and related problems.
- Gounaris, C. E., Wiesemann, W., e Floudas, C. A. (2013). The robust capacitated vehicle routing problem under demand uncertainty. *Operations Research*, 61(3):677–693.
- Letchford, A. N. e Salazar-González, J.-J. (2015). Stronger multi-commodity flow formulations of the capacitated vehicle routing problem. *European Journal of Operational Research*, 244(3): 730–738.
- Munari, P. e Álvarez, A. (2019). Aircraft routing for on-demand air transportation with service upgrade and maintenance events: Compact model and case study. *Journal of Air Transport Management*, 75:75–84.
- Munari, P., Moreno, A., Vega, J. D. L., Alem, D., Gondzio, J., e Morabito, R. (2018). The robust vehicle routing problem with time windows: compact formulation and branch-price-and-cut method. Technical Report 5, Federal University of São Carlos, Production Engineering Department (To appear in Transportation Science).
- Ordonez, F. (2010). *Robust Vehicle Routing*, chapter Chapter 7, p. 153–178. URL <http://pubsonline.informs.org/doi/abs/10.1287/educ.1100.0078>.
- Solomon, M. M. (1987). Algorithms for the vehicle routing and scheduling problems with time window constraints. *Operations Research*, 35(2):254–265.
- Toth, P. e Vigo, D. (2014). *Vehicle Routing: Problems, Methods and Applications*. MOS-SIAM Series in Optimization, Second edition.