

Modelo DEA-OCT com penalização baseada em valor alvo

Paulo Nocera Alves Junior

Universidade de São Paulo (USP/ESALQ)
Av. Pádua Dias, 11, Piracicaba/SP, Brasil
pjnocera@yahoo.com.br

Isotilia Costa Melo

Universidade de São Paulo (USP/EESC)
Av. Trabalhador são-carlense, 400, São Carlos/SP, Brasil
isotilia@gmail.com

Daisy Aparecida do Nascimento Rebelatto

Universidade de São Paulo (USP/EESC)
Av. Trabalhador são-carlense, 400, São Carlos/SP, Brasil
daisy@usp.br

RESUMO

O objetivo desse artigo é propor um modelo DEA-OCT (*Data Envelopment Analysis – Optimal Control Theory*) de eficiência dinâmica de custo que incorpore preferência gerencial. A preferência é feita utilizando penalizações por desvio de um valor alvo (e.g., estoque de segurança para o nível de estoque ou a própria demanda para a produção). Dessa forma, a função objetivo de minimização de custos se transforma em minimização de custos de ajustamento. Ou seja, seria a eficiência em atender uma demanda (incerta), mas sem aumentar o risco de falta de estoque. A relação entre medidas intermediárias, inputs e outputs também é considerada na dinâmica do sistema através de restrição variacional para avaliar a eficiência das empresas. O modelo proposto foi aplicado a empresas de comércio do Brasil e Chile, considerando dados trimestrais de 2010 a 2016. Foram eficientes: a empresa com os menores custos e uma rede de supermercados (ganhos de escala).

PALAVRAS CHAVE. Sistema de Controle de Estoque. DEA-OCT com Penalização. Eficiência de Custo Dinâmica.

Tópicos: DEA – Análise Envoltória de Dados

ABSTRACT

The objective of this paper is to propose a DEA-OCT (Data Envelopment Analysis) model of dynamic cost efficiency that incorporates management preference. The preference is made by using penalties for deviation from a target value (e.g., safety stock for the inventory level or the own demand for production). In this way, the objective function of cost minimization becomes minimization of adjustment costs. That is, it would be the efficiency in attending the (uncertain) demand, though without increasing the risk of lack of inventory. The relationship among intermediate measures, inputs, and outputs is also considered in the dynamics of the system through a variational constraint to evaluate the efficiency of the companies. The proposed model was applied to companies from commerce sector in Brazil and Chile, considering quarterly data from 2010 to 2016. The efficient companies: the company with the lowest costs and a supermarket chain (gains in scale).

KEYWORDS. Inventory Control System. DEA-OCT with Penalty. Dynamic Cost Efficiency.

Paper topics: DEA – Data Envelopment Analysis

1. Introdução

Uma das maneiras de minimizar os custos de estoque e produção, é utilizar a Teoria de Controle Ótimo (OCT, do inglês *Optimal Control Theory*), que serve para otimizar o controle de sistemas dinâmicos, aplicada ao modelo produção-estoque para encontrar funções dinamicamente ótimas de produção e estoque (SETHI, THOMPSON, 2006).

Segundo Alves Junior et al (2018), a partir das quantidades produzidas e estocadas ao longo do tempo, com base em uma demanda e levando em conta os custos, é possível analisar o desempenho dos sistemas de controle de estoque de Unidades Tomadoras de Decisão (DMUs, do inglês *Decision Making Units*) por meio da Análise Envoltória de Dados (DEA, do inglês *Data Envelopment Analysis*). DEA usada para medir a eficiência relativa de sistemas com múltiplas variáveis (*inputs, outputs* ou, no caso de sistemas dinâmicos, intermediárias).

As variáveis intermediárias e de ligação (*carry-over* e *link*) são usadas para se atribuir interdependência entre períodos de tempo ou redes de estruturas (TONE, TSUTSUI, 2010, 2014; KAO, HWANG, 2010; DESPOTIS, KORONAKOS, SOTIRO, 2016). Essas variáveis quase sempre estão associadas a modelos dinâmicos, de rede, ou de dois estágios. Segundo Fallah-Fini, Triantis e Johnson (2014), estoque é um dos cinco fatores mais comuns a que se atribui a interdependência temporal entre diferentes períodos, no contexto de eficiência dinâmica.

No contexto dinâmico (variacional), pode-se destacar o modelo dinâmico DEA-OCT de Alves Junior et. al. (2019) que além de ser dinâmico e considerar esses *links* entre períodos, também é um modelo variacional (com restrição da OCT) e usa estoque como um fator para atribuir tal interdependência. Segundo Alves Junior et. al. (2018) (DEA-OCT para sistemas estáticos) e Alves Junior et. al. (2019) (DEA-OCT dinâmico), sugerem que um problema importante a ser analisado, é que nem sempre é desejável um nível de estoque muito baixo ou igual a zero, pois assim, por exemplo, uma alta variação de uma demanda incerta pode levar à ocorrência de falta de estoque, que diminui a demanda atendida, podendo gerar um prejuízo maior do que os custos em se manter um pequeno excesso de estoque. Ou seja, uma alta variação da demanda aumenta o risco de falta de estoque e esse problema pode ser resolvido incorporando um estoque de segurança a ser mantido para cobrir essa variação da demanda durante o *lead time* em modelos DEA-OCT.

Com isso em mente, pode-se levantar a seguinte questão de pesquisa: Qual a eficiência de controle de uma DMU para atingir um valor alvo baseado na variação da demanda incerta, estoque de segurança e custos de ajustamento (eficiência em atender a demanda incerta, mas sem aumentar o risco de falta de estoque)?

Então o objetivo desse artigo é propor um modelo em que essa incorporação possa ser feita, utilizando uma penalização por desvio de um valor alvo na função objetivo de minimização de custos, onde esse possível valor alvo do nível de estoque é o estoque de segurança, enquanto um possível valor alvo da produção é a própria demanda, transformando a função objetivo em uma minimização de custos de ajustamento com restrição variacional.

2. REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

2.1. Desempenho de sistemas dinâmicos

2.1.1. Formulações e Aplicações da OCT à sistemas de controle de estoque

Um dos modelos da Teoria do Controle Ótimo (OCT) usados para o controle de sistemas produção-estoque consiste de uma função objetivo J para minimizar os custos de produção e estocagem no tempo t , e sujeita à condição da equação diferencial de estado que representa a variação do estoque (diferença entre a produção P e a demanda S). A formulação desse modelo proposto por Sethi e Thompson (2006) pode ser observada na Equação (2.1):

$$\begin{aligned} \max_{P(t)} J &= \int_0^T -[C_e \cdot I(t) + C_p \cdot P(t)] dt \\ \text{s.t.:} \quad &\begin{cases} \dot{I}(t) = \frac{\partial I}{\partial t} = P(t) - S(t) \\ I(0) = I_0 \\ I(T) \geq I_{\min} \\ P_{\min} \leq P(t) \leq P_{\max} \end{cases} \end{aligned} \quad (2.1)$$

A função objetivo de custo J pode ser interpretada da seguinte maneira: T é o último período do horizonte de tempo analisado, C_e é o custo unitário do estoque, $I(t)$ é a função de estoque ao longo do tempo, consequentemente $C_e \cdot I(t)$ é o custo total de estocagem, C_p é o custo unitário de produção, $P(t)$ é a função de produção ao longo do tempo, que deve respeitar o intervalo $[P_{\min}; P_{\max}]$, consequentemente $C_p \cdot P(t)$ é o custo total de produção, I_0 é o estoque inicial do primeiro período, $I(T)$ é o nível de estoque no último período T do horizonte de tempo, $I_{\min}$ é uma quantidade mínima de estoque, consequentemente $I(T) \geq I_{\min}$ é o nível de estoque mínimo que deseja-se estar no último período T do horizonte de tempo analisado.

Essa função objetivo pode ser modificada, por exemplo, para ter pontos ótimos em seus valores alvos, ou seja, penalizar as funções que fugirem dessas medidas. Outro ponto é que algumas restrições não são obrigatórias para que o modelo rode (como as que limitam $P(t)$ e $I(T)$). Um exemplo de modelo a tempo discreto com função penalização baseada em valores alvos desenvolvida por Sethi e Thompson (2006), tem a seguinte formulação (2.2):

$$\begin{aligned} \max_{P(t)} J &= - \left[\frac{C_e}{2} \cdot (I_1 - \hat{I})^2 + \sum_1^T \frac{C_e}{2} \cdot (I_t - \hat{I})^2 + \sum_1^T \frac{C_p}{2} \cdot (P_t - \hat{P})^2 \right] \\ \text{s.t.:} \quad &\begin{cases} P_t = S_t + I_t - I_{(t-1)} \\ I_{t=0} = I_0 \end{cases} \end{aligned} \quad (2.2)$$

A função objetivo J , com função de penalização, sem desconto, pode ser interpretada da seguinte maneira: T refere-se ao último período do horizonte de tempo e o problema pode ser de horizonte infinito ($T \rightarrow +\infty$), $\frac{C_e}{2} \cdot (I(t) - \hat{I})^2$ impõe que terá custos de estocagem C_e maiores quando o nível de estoque I estiver abaixo do estoque de segurança $\hat{I}$ (ex: custo por falta de estoque, por não atender a demanda, senão a melhor alternativa seria 0 de estoque) ou acima de $\hat{I}$ (ex: custo por excesso de estoque), e $\frac{C_p}{2} \cdot (P(t) - \hat{P})^2$ impõe que terá custos de produção C_p maiores quando a taxa de produção P estiver abaixo da meta de produção $\hat{P}$ (ex: custo por não atingir a meta de produção, por não atender a demanda, senão a melhor alternativa seria 0 de produção) ou acima de $\hat{P}$ (ex: custo por excesso de produção, por gerar um excesso de estoque). Já as restrições são as versões a tempo discreto da Equação (2.1).

Substituindo a parte quadrática por módulo (absoluto) é possível linearizar o modelo, e resolvê-lo por programação linear, de modo mais rápido e simples do que a versão não-linear.

2.1.2. Eficiência

Segundo Farrell (1957), eficiência pode ser dividida em eficiência econômica, técnica e alocativa. A eficiência técnica reflete à obtenção do máximo de *outputs* com o mínimo de *inputs*, ou seja, encontra a eficiência otimizada (melhores conjuntos de peso) de cada DMU. Já a alocativa mede a eficiência em se alocar uma proporção ótima de *inputs* para atender os *outputs*, dados os seus custos, enquanto para a eficiência de custo calcula-se a eficiência, de maneira focada em minimizar custos. Segundo Cooper, Seiford e Tone (2007), a “eficiência alocativa” definida por Farrell (1957) como a eficiência de preço (ou custo), na verdade, atualmente, é comumente chamada de eficiência de custo, já a eficiência alocativa é uma relação entre as eficiências técnica e de custo, embora os modelos continuem sendo denominados como alocativos, o que causa confusão de conceitos quando artigos recentes são comparados com artigos mais antigos.

A relação entre esses três tipos de eficiência é dada pela Equação (2.3):

$$\theta_{ae} = \frac{\theta_{ce}}{\theta_{te}} \quad (2.3)$$

Onde θ_{ae} é a eficiência alocativa, θ_{ce} é a eficiência de custo, e θ_{te} é a eficiência técnica.

A DEA calcula os melhores pesos não arbitrário para uma DMU e uma única medida de desempenho relativa (eficiência relativa) entre 0 e 1 para cada DMU, gerando uma fronteira de eficiência, onde as DMUs que obtêm valor igual a 1 são consideradas eficientes.

2.3.3. DEA alocativo e eficiência de custo

Segundo Cooper, Seiford e Tone (2007), quando se conhece a razão entre os custos dos *inputs* ou o preço dos *outputs*, pode-se calcular a eficiência de custo, de receita ou de lucro. Esta vem do resultado da minimização de custos ou maximização da receita (ou do lucro) em comparação com os custos ou preços (ou lucro) observados, para calcular a eficiência de custo, receita ou lucro. O modelo de minimização de custos mais simples é baseado no CCR dual orientado ao *input* (CHARNES; COOPER; RHODES, 1978), mas com informações de custos, e é formulado a partir do modelo de eficiência de lucro, mas sem informação de preço, de Färe, Grosskopf e Lovell (1985).

Com base nesses trabalhos, Tone (2002) afirma quando todos os custos unitários são constantes e iguais ($q_{jk}=q_k$) para todos os *inputs* das k DMUs, a eficiência de custo passa a ser

apenas uma comparação de quantidades $\left(\theta_{ce} = \frac{\sum_{j=1}^n x_{j0}^{p*}}{\sum_{j=1}^n x_{j0}}\right)$, então duas DMUs poderiam ser eficientes

se uma mesma quantidade fosse produzida, mesmo com diferentes custos unitários (entre as k DMUs, mas iguais entre os i inputs de uma mesma DMU). Para resolver esse problema, Tone (2002) propôs uma nova eficiência de custo baseada em outra medida de custo que não o unitário. Ao em vez de usar as informações de custo unitário q_j e as quantidades x_{j0} , é utilizado o custo total $C(q_j, x_{j0})_{j0} = Cx_{j0}^p$, mas considerando o custo unitário como igual a 1 ($q_j=1$) para as DMUs. Então a nova eficiência de custo sempre será uma comparação de custos em todas as circunstâncias. A formulação de Tone (2002) pode ser observada na Equação (2.4):

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_{j=1}^n Cx_{j0}^p \\ \text{s.t.:} \quad & \begin{cases} \sum_{k=1}^z \lambda_k Cx_{jk} \leq Cx_{j0}^p; & j=1,2,\dots,n \\ \sum_{k=1}^z \lambda_k Cy_{ik} \geq Cy_{i0}; & i=1,2,\dots,m \\ \lambda_k, Cx_{j0}^p \geq 0 \end{cases} \end{aligned} \quad (2.4)$$

Onde: Cx_{j0}^p é a projeção do custo total ótimo de *inputs* a ser otimizado, Cx_{jk} é o custo total observado de *inputs* da k -ésima DMU, Cy_{jk} é o preço total observado de *outputs* da k -ésima DMU, λ_k é a contribuição da k -ésima DMU para a DMU em análise, n é o número de *inputs*, m é o número de *outputs*, e z é o número de DMUs.

A nova eficiência de custo (θ_{nce}) é calculada como na Equação (2.5):

$$\theta_{nce} = \frac{\sum_{j=1}^n Cx_{j0}^{p*}}{\sum_{j=1}^n Cx_{j0}} \quad (2.5)$$

Onde: Cx_{j0}^{p*} e Cx_{j0} são, respectivamente, os custos totais ótimo e observado de *inputs*.

2.1.4. DEA dinâmico

A característica mais comum para capturar o comportamento inter-temporal nos modelos DEA dinâmicos é o uso de *outputs* de um período como *inputs* do próximo período, e essas variáveis que ligam os períodos foram chamadas de intermediárias.

Segundo Fallah-Fini e Triantis (2014), a interdependência temporal entre diferentes períodos pode ser atribuída a 5 fatores: 1) atraso na produção ou quando a utilização de insumos e a realização de produtos não é imediata; 2) estoques; 3) capital ou fatores quasi-fixos; 4) custos de ajustamento; 5) e melhoria incremental ou aprendizagem.

Entre estudos importantes no contexto de DEA dinâmico, do ponto de vista de sistemas de produção multi-estágio estão: Färe e Grosskopf (1996), que desenvolveram um modelo de DEA dinâmico com *inputs* que podem ser estocados, onde alguns estoques do tempo t são transferidos para o período $t+1$; e Chen (2009), que adotou um *framework* mais amplo, incluindo sub-DMUs (sub-processos de produção) e que permitia estoque deteriorável em DEA dinâmico.

Recentemente, Tone e Tsutsui (2014) desenvolveram modelos “mistos”, incorporando várias características em um único modelo de Network DEA dinâmico (DNDEA), inclusive um modelo sem orientação baseado em folgas (DNSBM), considerando variáveis intermediárias tanto entre períodos, como entre divisões da estrutura interna de uma DMU.

A respeito apenas dos estudos importantes que usam OCT combinado com DEA dinâmico, geralmente essas pesquisas são realizadas sob a perspectiva do *framework* de custos de ajustamento, como pode ser visto nos artigos de Sengupta (1999), Nemoto e Goto (1999), Sueyoshi e Sekitani (2005), Mateo, Coelli e O'Donnell (2006), Silva, e Stefanou (2007), Kapelko, Lansink e Stefanou (2014), e Alves Junior et. al. (2019).

Nemoto e Goto (1999), Silva, e Stefanou (2007), e Kapelko, Lansink e Stefanou (2014), descrevem modelos que usam características da OCT, porém com outros nomes, como equação de Hamilton-Jacobi-Bellman (HJB), ou restrição de transição como no caso de Mateo, Coelli e O'Donnell (2006). Sueyoshi e Sekitani (2005) estenderam o modelo de Nemoto e Goto (1999) incorporando Retorno Variável de Escala (VRS) de Banker, Charnes e Cooper (1984) nesse tipo modelo de DEA dinâmico. Existem outros modelos dinâmicos, mas como o foco deste artigo é no modelo DEA dinâmico variacional (integrado com OCT), então apenas esse tipo de modelo será discutido e aprimorado (como resultado deste artigo).

Uma outra característica utilizada para descrever o comportamento dinâmico é a taxa de variação de uma variável ao longo do tempo, ou seja, uma equação de estado ou uma restrição em que um dos termos é uma derivada (ou uma variação no tempo), utilizada para descrever, por exemplo, uma depreciação, uma expansão de capital ou uma variação do nível de estoque. Este tipo de modelo é alocativo (por causa dos custos e alocação de recursos) e dinâmico variacional (por causa das variações e do tempo), e tal modelo aplicado a sistemas de controle de estoque, segundo Alves Junior et. al. (2019), tem a formulação conforme a Equação (2.6):

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_{t=1}^T \left[\sum_{j=1}^{n-1} C_{j0t} x_{j0t}^p + \sum_{h=1}^{l-1} C_{h0t} z_{h0t}^p + C_{e0t} z_{e0t}^p + C_{p0t} x_{n0t}^p \right] \\ \text{s.t.:} \quad & \begin{cases} \sum_{k=1}^z x_{jkt} \lambda_{kt} \leq x_{j0t}^p, & j=1,2,\dots,n-1 \\ \sum_{k=1}^z x_{nkt} \lambda_{kt} \leq x_{n0t}^p \\ \sum_{k=1}^z z_{hkt} \lambda_{kt} + s_h^{\text{free}} = z_{h0t}^p, & h=1,2,\dots,l-1 \\ \sum_{k=1}^z z_{lkt} \lambda_{kt} + s_l^{\text{free}} = z_{l0t}^p, & t=1,2,\dots,T \\ \sum_{k=1}^z y_{ikt} \lambda_{kt} \geq y_{i0t}, & i=1,2,\dots,m-1 \\ \sum_{k=1}^z y_{mkt} \lambda_{kt} \geq y_{m0t} \\ \Delta z_{l0t}^p = z_{l0t}^p - z_{l0(t-1)}^p = x_{n0t}^p - y_{m0t} \end{cases} \end{aligned} \quad (2.6)$$

Onde essa função objetivo J de custo da DMU em análise pode ser interpretada como: T é o último período do horizonte de tempo, C_{j0t} é o custo do j-ésimo *input* da DMU em análise no tempo t, C_{h0t} é o custo da h-ésima medida intermediária, C_{p0t} é o custo da variável de controle (exemplo: custo de produção), C_{e0t} é o custo da variável de estado (exemplo: custo de estoque).

Quando índice k=0, indica que são valores da DMU em análise. x_{j0t}^p é a variável de projeção do j-ésimo *input* da DMU em análise no tempo t, y_{i0t} é o i-ésimo *output* da DMU em análise no tempo t, z_{h0t}^p é a variável de projeção da h-ésima medida intermediária da DMU em análise no tempo t, x_{n0t}^p é a principal variável *input* de controle da DMU em análise (exemplo: produção) no tempo t, y_{m0t} é a principal variável *output* exógena da DMU em análise (exemplo: demanda) no tempo t, z_{l0t}^p é a principal variável intermediária de controle da DMU em análise (exemplo: estoque) no tempo t, e Δz_{l0t}^p é a variação de estoque.

Nas restrições, λ_{kt} é a contribuição da k-ésima DMU para a DMU em análise, x_{jkt} é o j-ésimo *input* da k-ésima DMU, y_{ikt} é o i-ésimo *output* da k-ésima DMU, z_{hkt} é a h-ésima medida intermediária da k-ésima DMU, x_{nkt} é a principal variável *input* de controle da k-ésima DMU

(exemplo: produção), y_{mkt} é a principal variável *output* exógena da k-ésima DMU (exemplo: demanda), z_{lkt} é a principal variável intermediária de controle da k-ésima DMU (exemplo: estoque), s_h^{free} e s_l^{free} são as folgas que denotam o desvio do *link*.

Para a aplicação empírica, como a variável z_{l0t} é a variável intermediária de estado, esta pode ser o estoque. Como na prática podemos dividir o estoque entre inicial $z_{lkt}^- = z_{lkt(t-1)}$ e estoque final $z_{lkt}^+ = z_{lkt(t)}$ em um determinado período $t=1,2,...,T$, então a folga livre s_l^{free} pode ser dividida em duas variáveis de folga s_l^{-free} e s_l^{+free} não-negativas combinadas linearmente ($s_l^{free} = s_l^{-free} - s_l^{+free}$), conforme foi proposto por Tone e Tsutsui (2014). As restrições também são divididas em $\sum_{k=1}^z z_{lkt}^+ \lambda_{kt} + s_l^{+free} = z_{l0t}^+$, para $t=1,...,T$ e $\sum_{k=1}^z z_{lkt}^- \lambda_{kt} + s_l^{-free} = z_{l0t}^-$, para $t=1,...,T$. E a restrição variacional do modelo é a equação de diferença que representa a variação do estoque Δz_{l0t}^P a tempo discreto. Além disso esse modelo pode estar sujeito à restrição de valor inicial $z_{l01}^- = z_{l00} = I_0$ da DMU em análise, assim como em modelos OCT.

3. MÉTODO DE PESQUISA

3.1. Amostra de Dados e Variáveis de Pesquisa

A amostra total de dados foi tomada de forma não aleatória, considerando as DMUs do setor de comércio do Brasil e do Chile, com dados trimestrais cadastrados no software Economática, a partir do quarto trimestre de 2010 (para cálculo do custo médio de estoque e uso do estoque inicial no próximo trimestre) até o primeiro trimestre de 2016. Este período foi escolhido pois coincide com o momento em que passou a ser obrigatório adotar o método contábil descrito nas normas internacionais de contabilidade (*International Financial Reporting Standards* - IFRS) para fazer demonstrações financeiras no Brasil, assim como a maioria das empresas do Chile.

Foram excluídas as DMUs que continham dados negativos, iguais a zeros, não informados, ou que constavam como fora dos padrões internacionais. No total, foram analisadas 27 empresas do setor de comércio do Brasil e Chile (países emergentes economicamente).

Seguindo a classificação de variáveis de Tone e Tsutsui (2014) e as relações da Figura 1 para descrever as variáveis utilizadas nos modelos DEA, OCT e sistemas de controle de estoque, classificam-se as variáveis do modelo como: Produção é o *input* e a variável de controle, Demanda é o *output* e a variável exógena, e Estoque é a variável intermediária e a variável de estado, sendo esta do tipo livre. Como a variável de ligação intermediária é livre, esta pode ser dividida em duas variáveis, uma para ligação de *output* (estoque final do período t) e outra para ligação de *input* (estoque inicial do período t é igual ao estoque final do período $t-1$).

Para o modelo de custos totais que será descrito a seguir, essas variáveis de quantidades (produção, demanda e estoques) serão substituídas pelos custos relacionadas a elas (CPP, CPV e CEF e CEI). Para Araújo e Neto (2010), em relatórios financeiros, os custos importantes são relacionados à produção, ao produto vendido e aos estoques (Equações 3.1 a 3.4)):

$$CPP = C_p \cdot P \quad (3.1)$$

$$CPV = C_d \cdot S \quad (3.2)$$

$$CEF = C_f \cdot I_f \quad (3.3)$$

$$CEI = C_i \cdot I_i \quad (3.4)$$

Onde: C_p é o custo unitário de produção, P é a produção, C_d é o custo unitário do bem vendido, S é a quantidade de bens vendidos (=demanda atendida), CEF é o custo de estoque final, no fechamento do trimestre em análise; CEI é o custo de estoque inicial, no começo do trimestre em análise (igual ao do final do trimestre anterior $t-1$); C_i é o custo unitário do estoque inicial, C_f é o custo unitário do estoque final, I_f é o nível de estoque final, e I_i é o nível de estoque inicial.

A relação entre Produção P , Demanda S , e Estoques I_f e I_i na variação de estoque (3.5) é a mesma equação da restrição variacional em OCT. Já em termos de custos totais, tem-se uma relação similar (3.6) descrita por Araújo e Neto (2010).

$$P_t = S_t + I_t - I_{t-1} \quad (3.5)$$

$$CPP = CPV + CEF - CEI \quad (3.6)$$

Em vários trabalhos, ao considerar um modelo estocástico, assume-se que a demanda segue uma distribuição normal, ou uma aproximação por uma curva normal.

Segundo Correa, Giansesi e Caon (2009), o estoque de segurança pode ser calculado de forma mais geral utilizando uma abordagem probabilística:

$$ES = F_{\text{Safety}} \cdot \sigma_{SLT} \quad (3.7)$$

Onde: ES é o estoque de segurança; F_{Safety} é o fator de segurança (em função do nível de serviço, com base na distribuição normal de probabilidade); e σ_{SLT} é o desvio-padrão da demanda durante o *lead time*, que pode ser modelado de várias maneiras diferentes.

O desvio-padrão da demanda durante o *lead time* (σ_{SLT}), pode ser calculado, segundo Correa, Giansesi e Caon (2009), de várias formas. Como neste artigo serão considerados apenas desvios na demanda e com $LT=1$, será utilizado apenas a Equação (3.8). Para outras estimativas de estoque de segurança, consultar o livro de Correa, Giansesi e Caon (2009). O desvio-padrão da demanda durante o *lead time* com variação da demanda e *lead time* constante, ou seja, $\sigma_{LT}=0$:

$$\sigma_{SLT} = \sigma_S \cdot \sqrt{LT} \quad (3.8)$$

Onde: σ_{SLT} é o desvio-padrão da demanda durante o *lead time*; S é a Demanda; LT é o *lead time* de ressurgimento; e σ_S é o desvio-padrão da demanda.

Neste artigo, será utilizado um fator de segurança igual a 1 ($F_{\text{Safety}}=1$) e um desvio-padrão da demanda durante o *lead time* com *lead time* constante e unitário ($LT=1$, $\sigma_{LT}=0$, $\sigma_{SLT}=\sigma_S$). Isso significa que o nível de serviço baseado na distribuição normal de probabilidade (para $F_{\text{Safety}}=1$) é aproximadamente 84,14% e $\sigma_{SLT}=\sigma_S$, para assim ser possível comparar as unidades tomadoras de decisão com os mesmos parâmetros.

É importante observar que, no modelo alocativo padrão, ou até mesmo no dinâmico de Alves Junior et. al. (2019), os custos dos *inputs* (e das variáveis intermediárias) fazem parte da função objetivo, não sendo incluídos diretamente como uma variável *input*. Como esses dados de custos unitários precisam ser estimados (já que não são encontrados nos relatórios contábeis), eles carregam um certo erro inerente da estimação.

Uma maneira de se lidar com o problema de não possuir essas informações de custos unitários e quantidades em relatórios contábeis é utilizando o conceito da chamada Nova Eficiência de Custos de Tone (2002), que é baseada em custos totais, e foi utilizada nesse modelo dinâmico. As quantidades são substituídas por custos totais e os custos unitários são considerados como iguais a 1. Ou seja, são utilizadas as variáveis que estão disponíveis os valores de custos CPV e CE (que podem ser divididos em CEF e CEI), então utilizou-se a fórmula do CPV, descrita por Araújo e Neto (2010), para o cálculo do CPP de acordo com a Equação (3.6) ao em vez da Equação (3.5), pois o modelo proposto usa custos totais e não custos unitários.

Então as variáveis intermediárias são os custos totais CEF e CEI (ao em vez dos estoques I_f e I_i), o output é o CPV (ao em vez da demanda, mas que contém informação sobre a demanda), e o input CPP (ao em vez da produção):

$$z_{lkt}^+ = CEF_{kt} \quad (3.7)$$

$$z_{lkt}^- = CEI_{kt} \quad (3.8)$$

$$y_{mkt} = CPV_{kt} \quad (3.9)$$

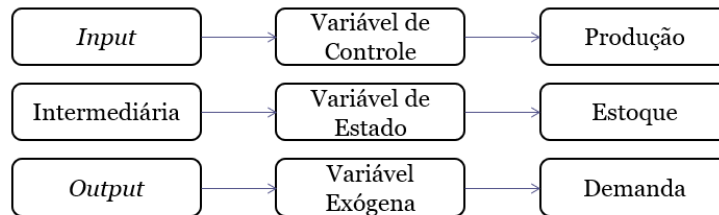
$$x_{nkt} = CPP_{kt} \quad (3.10)$$

O software MATLAB foi usado para realizar as programações matemáticas e fazer os cálculos das funções, variáveis, parâmetros e coeficientes do modelo.

3.2. Estrutura do sistema

O método de pesquisa é baseado em Alves Junior et. al. (2019), aprimorando seu modelo DEA-OCT dinâmico que relaciona dinamicamente os recursos do sistema de controle, de forma a obter, com base nos custos e na demanda, a partir de um estoque inicial, as funções de produção e estocagem ótimas, de forma que se considere um valor alvo (e.g. estoque de segurança para o nível de estoque e a própria demanda para a produção) baseado na variação da demanda. Para o desenvolvimento do modelo, os tipos de variáveis da OCT e DEA (e de sistemas de controle de estoque) se relacionam conforme a Figura 1.

Figura 1 – Relação entre os tipos de variáveis usadas neste artigo (DEA->OCT->Sistema).

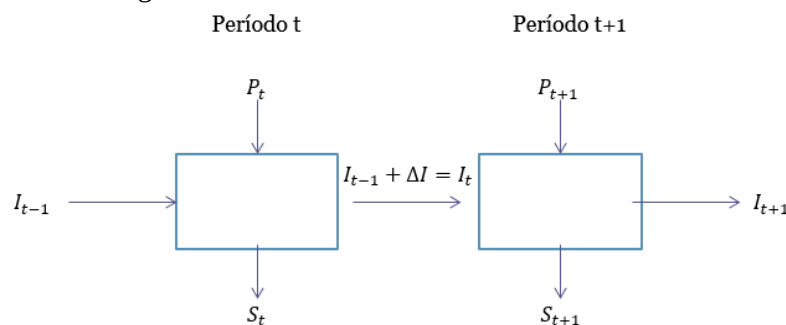


Essa relação se dá pelo próprio conceito envolvido com esses tipos de variáveis em sistemas de controle de estoque.

Nesses sistemas, quanto maior for a variável exógena atendida (demanda), melhor, ou seja, se comporta como um *output* de DEA; e quanto menor for o custo da variável de controle (produção), melhor, ou seja, se comporta como um *input* de DEA. Já a variável de estado (estoque) varia conforme o controle, é otimizada de forma indireta, quando a variável de controle é otimizada, e pode se comportar ora como *output*, ora como *input* (ou *output* indesejável), ou seja, se comporta como uma variável intermediária. Essas classificações também são válidas para seus respectivos custos, seguindo esta lógica das quantidades.

Do ponto de vista dinâmico (Figura 2), a saída do processo em um período vai para a entrada do próximo período (ou seja, comportamento intermediário, *output* de um período é o *input* do próximo período). Já em termos de nível de estoque, quando há risco de falta, o estoque é desejável para não perder vendas, então quanto maior, melhor (*output*), mas a partir de um determinado nível, quando há excesso, quanto menor, melhor (*input* ou *output* indesejável), ou seja, pensando em termos de seu nível, também tem um comportamento intermediário.

Figura 2 – Estrutura do sistema dinâmico discreto.



É importante reforçar que o estoque como uma medida intermediária, também é uma variável de estado que tem uma relação direta com o *input* (produção) e a demanda (*output*). E quando se considera os valores alvos, a ideia é que exista um ponto mínimo para a função nesses valores alvos, ou seja, quanto menor essa diferença (em valor absoluto/módulo), melhor (logo essa medida após penalização tem comportamento de *input*). Também é válido mencionar que a estrutura está sendo mostrada em termos das quantidades, porém conforme a Equação (3.6), essa relação também é válida para seus respectivos custos totais, portanto esse tipo de sistema será considerado para propor o modelo da Equação (4.4), que será apresentado no próximo tópico.

4. RESULTADOS E DISCUSSÕES

Este tópico será dividido em duas sessões. A primeira é sobre o modelo proposto, que é um dos resultados e o objetivo principal deste artigo. A segunda é sobre a parte empírica, uma aplicação para testar o modelo.

4.1. Modelo Proposto DEA-OCT a tempo discreto para cálculo da Nova Eficiência de Custo com penalização, com custo de ajustamento e pressuposto VRS

Este modelo incorpora valores alvos (por exemplo, estoque de segurança como valor alvo do nível de estoque) através de penalizações, semelhantes à Equação (2.13), porém de forma

absoluta (módulo) ao em vez de quadrática (Equação (4.1)), pois assim facilita a programação matemática, que além de discretizada pode ser linearizada (Equação (4.6)).

Como o modelo é proposto para avaliar sistemas de controle de estoque, para facilitar as notações e índices das variáveis do modelo, as possíveis demais variáveis que não fazem parte de sistemas de controle de estoque serão omitidas, assim como os índices que indicariam que a variável é de um sistema de controle de estoque (já que todas serão apenas desses sistemas).

Como o parâmetro ES depende de σ_{SLT} (e não do seu custo), este modelo será desenvolvido a partir da Equação (2.13), mas considerando penalizações (Equação (4.1)):

$$\min_{z_{0t}^-, z_{0t}^+, x_{0t}^p} \frac{c_{i01}|z_{01}^- - ES| + \sum_{t=1}^T c_{f0t}|z_{0t}^+ - ES| + \sum_{t=1}^T c_{p0t}|x_{0t}^p - S|}{c_{i01}|I_{i01} - ES| + \sum_{t=1}^T c_{f0t}|I_{f0t} - ES| + \sum_{t=1}^T c_{p0t}|P_{0t} - S|} \quad (4.1)$$

Vale a pena observar que $\Delta Z_{0t} = x_{0t}^p - S$ e $\Delta I_{0t} = P_{0t} - S$, ou seja, considerando os custos e a penalização, de certa forma estamos passando a considerar as variações de estoque e os custos de ajustamento diretamente na função objetivo.

O custo unitário é positivo e a multiplicação desse custo pelo módulo da diferença entre a quantidade e o valor alvo é a mesma coisa que o módulo dessa multiplicação. O custo unitário multiplicado pela quantidade é o custo total (variável que será usada para o cálculo da Nova Eficiência de Custo com essa função de penalização).

Se o custo unitário de produção C_{p0t} for igual ao custo unitário do produto vendido C_{d0t} , como é o caso que acontece na nova eficiência de custo, já que são considerados que todos os custos unitários são iguais a 1, então $C_{p0t}S = C_{d0t}S = CPV_{0t}$.

Já para o estoque de segurança ES (Equação (2.10)) com $LT=1$ (ou seja, considerando $\sigma_{SLT} = \sigma_S$), se o custo unitário do produto vendido C_{d0t} for igual ao custo unitário dos estoques (inicial e final) C_{e0t} , ou seja, $C_{e0t} = C_{i0t} = C_{f0t} = C_{d0t}$, como é o caso que acontece na nova eficiência de custo, já que são considerados que todos os custos unitários são iguais a 1, então pode-se considerar a propriedade multiplicativa do desvio-padrão. Para CES como sendo o “custo do estoque de segurança”:

$$\begin{aligned} \sigma_{CPV} &= \sigma(CPV_{0t}) = \sigma(C_{d0t} \cdot S_{0t}) = \sigma(C_{e0t} \cdot S_{0t}) = C_{e0t} \cdot \sigma_S \\ \sigma_{CPV} &= C_{e0t} \cdot \sigma_S \end{aligned} \quad (4.2)$$

Então, considerando as Equações (2.7), (2.10) e (4.2), com $LT=1$ ($\sigma_{SLT} = \sigma_S$) e os custos unitários iguais, o valor alvo do estoque (custo) é o seguinte:

$$\begin{aligned} CES &= C_{e0t} \cdot ES = C_{e0t} \cdot F_{Safety} \cdot \sigma_{SLT} = F_{Safety} \cdot \sqrt{LT} \cdot C_{e0t} \cdot \sigma_S = F_{Safety} \cdot \sigma_{CPV} \\ CES &= F_{Safety} \cdot \sigma_{CPV} \end{aligned} \quad (4.3)$$

Com isso, pode-se utilizar o “custo do estoque de segurança” CES como um valor alvo baseado no desvio-padrão do custo total do produto vendido σ_{CPV} . Vale a pena notar que da mesma forma que na Equação (2.7), se o fator de segurança F_{Safety} da CES na Equação (4.3) for igual a 1 ($F_{Safety}=1$), o nível de serviço baseado na distribuição normal de probabilidade (para $F_{Safety}=1$) é aproximadamente 84,14%. Então, considerando a penalização e as Equações (4.1), (4.2) e (4.3) para a formulação da função objetivo e restrições com base na Equação (2.19), a formulação do modelo proposto transforma o modelo da Equação (2.19) em não-linear.

Apesar de ser a tempo discreto, o modelo se torna não-linear, portanto não pode ser resolvido diretamente por Programação Linear, então, segundo Bertsimas e Tsitsiklis (1997), pode-se linearizar as funções absolutas (módulos), adicionando uma variável e duas restrições para cada função absoluta (módulo) que contenha uma variável de decisão (projeção). Com essas considerações, o modelo linear proposto é o seguinte (Equação (4.4)):

$$\min_{CZ_{0t}^{-p}, CZ_{0t}^{+p}, CX_{0t}^p} \frac{CES_{z01}^{-p} + \sum_{t=1}^T CES_{z0t}^{+p} + \sum_{t=1}^T CES_{p0t}^p}{|CEI_{01} - CES_0| + \sum_{t=1}^T |CEF_{0t} - CES_0| + \sum_{t=1}^T |CPP_{0t} - CPV_0|} \quad (4.4)$$

S.t.:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{k=1}^z CPV_{kt} \lambda_{kt} - S_{ykt}^+ = CPV_{0t}, t = 1, 2, \dots, T \\ \sum_{k=1}^z |CPP_{kt} - CPV_k| \lambda_{kt} + S_{xkt}^- = CES_{p0t}^p, t = 1, 2, \dots, T \\ \sum_{k=1}^z |CEF_{kt}^+ - CES_k| \lambda_{kt} + S_{zkt}^+ = CES_{z0t}^{+p}, t = 1, 2, \dots, T \\ \sum_{k=1}^z |CEI_{kt}^- - CES_k| \lambda_{kt} + S_{zkt}^- = CES_{z0t}^{-p}, t = 1, 2, \dots, T \\ \sum_{k=1}^z |CEF_{kt}^+ - CES_k| \lambda_{kt} - |CEI_{k(t+1)}^- - CES_k| \lambda_{k(t+1)} + S_{zkt}^+ - S_{zk(t+1)}^- = 0, t = 1, \dots, T-1 \\ CX_{0t}^p - CZ_{0t}^{+p} + CZ_{0t}^{-p} = CPV_{0t}, t = 1, 2, \dots, T \\ CZ_{01}^{-p} = CEI_{01} \\ CZ_{0t}^{-p} - CES_{z0t}^{-p} \leq CES_0, t = 1, 2, \dots, T \\ -CZ_{0t}^{-p} - CES_{z0t}^{-p} \leq -CES_0, t = 1, 2, \dots, T \\ CZ_{0t}^{+p} - CES_{z0t}^{+p} \leq CES_0, t = 1, 2, \dots, T \\ -CZ_{0t}^{+p} - CES_{z0t}^{+p} \leq -CES_0, t = 1, 2, \dots, T \\ CX_{0t}^p - CES_{p0t}^p \leq CPV_0, t = 1, 2, \dots, T \\ -CX_{0t}^p - CES_{p0t}^p \leq -CPV_0, t = 1, 2, \dots, T \\ \sum_{k=1}^z \lambda_{kt} = 1 \end{array} \right.$$

Onde CES_{z0t}^{-p} é a variável de linearização de $|CZ_{0t}^{-p} - CES_0|$ da DMU em análise no período t , CES_{z0t}^{+p} é a variável de linearização de $|CZ_{0t}^{+p} - CES_0|$ da DMU em análise no período t , CES_{p0t}^p é a variável de linearização de $|CX_{0t}^p - CPV_0|$ da DMU em análise no período t , CZ_{0t}^{-p} é a projeção do link de input (custo do estoque inicial) da k -ésima DMU no período t , CZ_{0t}^{+p} é a projeção do link de output (custo do estoque final) da k -ésima DMU no período t , CX_{0t}^p é a projeção do input (custo de produção) da k -ésima DMU no período t , CES_k é o valor alvo do custo do estoque (Equação (4.3)) da k -ésima DMU, CPV_k é o valor alvo do custo de produção da k -ésima DMU, CPP_{kt} é o custo de produção do período t da k -ésima DMU, CEI_{kt} é o custo do estoque inicial da k -ésima DMU no período t , CEF_{kt} é o custo do estoque final da k -ésima DMU no período t , CPV_{kt} é o custo do produto vendido da k -ésima DMU no período t , S_{xkt}^- é a folga do input no período t , S_{zkt}^- é a folga do link de input no período t , S_{zkt}^+ é a folga do link de output no período t , S_{ykt}^+ é a folga do output no período t , λ_{kt} é a contribuição da k -ésima DMU para a DMU em análise (no tempo t), T é o número de períodos (horizonte de tempo), z é o número de DMUs, e $k=0$ indica a DMU em análise.

Este modelo proposto da Equação (4.4) pode ser resolvido por Programação Linear. Os valores $|CEI_{kt}^- - CES_k|$, $|CEF_{kt}^+ - CES_k|$, e $|CPP_{kt} - CPV_k|$ (incluindo os da DMU em análise) não interferem na linearidade do modelo, pois são dados conhecidos a priori, ou seja, são coeficientes (constantes) e não precisam ser encontrados pelo modelo. A restrição de retorno variável de escala (VRS) também foi incluída nesse modelo proposto, já que nem sempre um aumento nas produções e estoques leva a um aumento proporcional e constante da demanda.

Exemplos de DMUs onde é possível esperar comportamentos VRS são grandes supermercados ou lojas de departamento que precisam estocar uma grande variedade de todos os tipos de produtos, embora o que demora ser vendido acabe sendo colocado em promoção e vendido a um preço mais baixo, o ganho de escala compensa.

4.2. Aplicação empírica usando o modelo proposto

Os resultados deste modelo DEA-OCT com penalização e pressupostos VRS (Equação (4.4)) para o setor de comércio podem ser observados na Tabela 1.

Tabela 1 – Eficiência com penalização (setor de comércio)

DMU	Rank	Ef.	DMU	Rank	Ef.	DMU	Rank	Ef.
B2W Digital	16	0,7042	Grazziotin	21	0,6124	Natura	18	0,6845
Battistella	26	0,4901	Hites	22	0,5942	Pão de Açúcar	1	1
BR Pharma	15	0,7292	Inbrands SA	25	0,4961	Profarma	20	0,6282
Cem	13	0,7722	Lojas Americ	4	0,8908	RaiaDrogasil	12	0,7807
Cencosud	6	0,8429	Lojas Hering	1	1	Ripley	11	0,7861
Dimed	19	0,6491	Lojas Marisa	8	0,8162	Soquicom	17	0,7014
Empreend Pg			Lojas Renner	7	0,8391	Viavarejo	10	0,7931
Menos	5	0,8458	Magaz Luiza	14	0,7561	Volcan	9	0,7961
Falabella	3	0,9023				Wlm Ind	24	0,4984
Forus	27	0,4710	Minasmaquinas	23	0,5780	Com		

Pode-se observar que as DMUs Pão de Açúcar (demanda menos estável, porém, maior receita e ganhos de escala) e Lojas Hering (demanda mais estável e menores custos) são eficientes. Comparando com o resultado Alves Junior et al. (2019), ambas as DMUs também estavam entre as eficientes. A principal diferença entre os modelos é quanto à BR Pharma, que era eficiente para Alves Junior et al. (2019), embora não fosse esperado, por causa de resultados negativos no período. Houve falta de estoque e isso foi se estendendo, incorrendo em custos e acumulando prejuízos durante meia década, até que a empresa fez um pedido de recuperação judicial (EXAME, 2018). Já no modelo proposto, isso se resolve assumindo o estoque de segurança baseado nas estatísticas da demanda, já que tal DMU aumentou seu risco de falta de estoque, que foi penalizado com base no valor da preferência gerencial. Ou seja, o modelo serviu ao se mostrar mais adequado.

5. CONCLUSÕES

O presente trabalho teve como objetivo propor um modelo DEA-OCT de eficiência dinâmica de custo, que incorpore preferência gerencial. A preferência foi feita utilizando penalizações por desvio de um valor alvo (e.g., estoque de segurança para o nível de estoque e a própria demanda para a produção). Dessa forma, a função objetivo de minimização de custos se transforma em minimização de custos de ajustamento.

Como na prática existem preferências gerenciais e metas, então o modelo proposto utiliza-se de valores alvos baseados na demanda (como o estoque de segurança) para calcular a eficiência. Esses valores alvos são calculados da mesma forma para todas as DMUs, para que possam ser analisadas de forma homogênea.

A principal referência para o modelo proposto foi o modelo integrado DEA-OCT de Alves Junior et. al (2019) para cálculo da eficiência dinâmica de custo de sistemas de controle de estoque de unidades tomadoras de decisão. Este modelo foi aprimorado com preferências gerenciais, incorporando penalizações por desvios de valores alvos.

A presente aplicação prática apontou que o modelo proposto penaliza as DMUs que fogem dos valores da preferência gerencial e que incorrem em riscos, conforme o objetivo. No modelo utilizado como base, uma DMU que estava incorrendo em custos não observados por falta de estoque era considerada como eficiente (pelo baixo nível de estoque), mas com o modelo proposto ela deixa de ser. Uma vez que o risco foi capturado pelo modelo ao utilizar a preferência gerencial, já que a DMU fugia dos valores de estoque de segurança, então o objetivo foi alcançado.

As DMUs eficientes foram: Lojas Hering e Pão de Açúcar (setor de comércio brasileiro). Vale ressaltar que as Lojas Hering (Brasil) possuem os menores custos e a demanda mais estável, enquanto o Pão de Açúcar (Brasil) é uma grande empresa que vende uma grande variedade de produtos, sendo seus custos e estoques compensados pela escala.

Uma das limitações deste trabalho é o número de empresas que seguem o IFRS (para uma comparação homogênea e internacional), pois, no artigo, 70% das empresas eram brasileiras. Outra limitação é quanto à medida da preferência gerencial, já que foi assumido um valor

baseado nas estatísticas da demanda, mas que não necessariamente reflete a política da empresa, embora sirva como um valor padronizado para conseguir fazer comparação entre as DMUs.

Pode-se sugerir para trabalhos futuros, o uso de variáveis estocástica e *chance constrained* (permitindo definir o nível de serviço nas restrições) incorporado a esse modelo DEA-OCT, bem como o desenvolvimento da versão técnica desse modelo de custo.

REFERÊNCIAS

- ALVES JUNIOR, P. N.; MELO, I. C.; CELESTINI, G.; REBELATTO, D. A. N. Modelo de controle alocativo de Análise Envoltória de Dados (DEA) para avaliar sistemas de controle de estoque quando há relação entre as variáveis. GEPROS. Ano 13, nº 1, p. 143-160. 2018.
- Alves Junior, PN, Yushimito, WF, Gude, JP, Melo, IC, & Rebelatto, DAN. Insider understanding of country development: a novel application of Optimal Control Theory and Data Envelopment Analysis for benchmarking performance of Chilean and Brazilian companies. CEREM, 3(1). 2019.
- ARAÚJO, A.M.P., NETO, A.A. Aprendendo a contabilidade: Como entender o processo contábil, como interpretar as demonstrações contábeis, como aplicar a contabilidade em negócios. Inside Books, 2010.
- Banker, R. D.; Charnes, A.; and Cooper, W.W. Some Models for Estimating Technical and Scale Inefficiencies in Data Envelopment Analysis. Management Science, v. 30, n. 9, p. 1078-1092, 1984.
- BERTSIMAS, D.; & TSITSIKLIS, J. Introduction to Linear Optimization. Athena Scientific, 1997.
- CHARNES, A., COOPER, W.W., & RHODES, E. Measuring the efficiency of decision-making units. European Journal of Operational Research, 2, 429-444, 1978.
- CHEN, C.-M. A network-DEA model with new efficiency measures to incorporate the dynamic effect in production networks. EJOR, 194, 687-699. 2009.
- COOPER, W. W., SEIFORD, L. M., & TONE, K. Data Envelopment Analysis: A Comprehensive Text with Models, Applications, References and DEA-Solver Software. New York: Springer. 2007.
- CORREA, H. L.; GIANESI, I. G. N.; CAON, M. Planejamento, programação e controle da produção. 5. ed. São Paulo: Atlas, 2009.
- DESPOTIS, D.K., KORONAKOS, G., SOTIRO, D. Composition versus decomposition in two-stage network DEA: a reverse approach. J. of Productivity Analysis. v. 45, p. 71 - 87, 2016.
- EXAME. Os erros e a queda da BR Pharma. 2018. Disponível em: < <https://exame.abril.com.br/negocios/os-erros-e-a-queda-da-br-pharma-criada-com-planos-grandiosos/> >. Acesso em: 05 mar. 2019.
- FALLAH-FINI, S.; TRIANTIS, K.; JOHNSON, A. L. Reviewing the literature on non-parametric dynamic efficiency measurement: State-of-the-art. Journal of Productivity Analysis. v. 41, p. 51 - 67, 2014.
- FÄRE, R., & GROSSKOPF, S. Intertemporal Production Frontiers: With Dynamic DEA. Boston: Kluwer Academic Publishers. 1996.
- FARRELL, M. J. The measurement of Productive Efficiency. Journal of the Royal Statistical Society, v. 120, n. 3, p. 253 - 290, 1957.
- KAPELKO, M, OUDE LANSINK, A, & STEFANO, SE. Assessing dynamic inefficiency of the Spanish construction sector pre- and post-financial crisis. EJOR, 237, 349-357. 2014.
- KAO, C., HWANG, S.N. Efficiency measurement for network systems: IT impact on firm performance. Decision Support Systems, v. 48, p. 437 - 446, 2010.
- MATEO, F., COELLI, T., & O'DONNELL. Optimal Paths And Costs Of Adjustment In Dynamic DEA Models: With Application To Chilean Department Stores. C. Ann Oper Res, v. 145, p. 211-227, 2006.
- NEMOTO, J.; GOTO, M. Dynamic data envelopment analysis: modeling intertemporal behavior of a firm in the presence of productive inefficiencies. Economics Letters, 64, 51-56, 1999.
- SENGUPTA, J. K. A dynamic efficiency model using data envelopment analysis. International Journal of Production Economics. v. 62, p. 209 - 218, 1999.
- SETHI, S.P., & THOMPSON, G. L. Optimal control theory: applications to management science and economics. New York: Springer, 2006.
- SILVA, E., & STEFANO, S.E. Dynamic efficiency measurement: theory and application. American Journal of Agricultural Economics, 89(2), 398-419. 2007.
- SUEYOSHI, T., & SEKITANI, K. Returns to scale in dynamic DEA. European Journal of Operational Research, 161, 536-544. 2005.
- TONE, K. A Strange Case of the Cost and Allocative Efficiencies in DEA. JORS, 53(11), p.1225-1231. 2002.
- TONE, K., TSUTSUI, M. Dynamic DEA with network structure: A slacks-based measure approach. Omega, v. 42, p. 124 - 131, 2014.