LI Simpósio Brasileiro de Pesquisa Operacional
Limeira–SP, 02 a 06 de setembro de 2019

META-HEURÍSTICAS APLICADAS AO PROBLEMA DO DIÂMETRO EM GRAFOS COM ARESTAS ROTULADAS

Calebe Oliveira de Figueirêdo[1]
Thiago Gouveia da Silva[1]
Kerven Maciel Monteiro de Albuquerque[1]
Valeria Maria Bezerra Cavalcanti[1]
[1]Instituto Federal da Paraíba, João Pessoa — PB
Autores para correspondência:calebeof14@gmail.com

RESUMO

Seja $G = (V, E, L)$ um grafo com arestas rotuladas, no qual V é o conjunto de vértices de G, E é o conjunto de arestas, L é o conjunto de rótulos (cores) sobre E e cada aresta $e \in E$ possui um rótulo $L(e)$ associado; o Problema do Diâmetro Colorido (PDC) tem como objetivo encontrar o menor inteiro *k* de modo que existe um caminho colorido com no máximo *k* cores para qualquer par $s, t \in V$. Segundo Carr et al. [2000] e Broersma et al. [2005], o Problema do Menor Caminho Colorido (PMCC) é NP-Difícil, e por conseguinte, o PDC também é. Neste trabalho, propomos dois novos métodos para resolução do PDC, ambos baseados na meta-heurística VNS. Os testes computacionais executados demonstram que os métodos propostos são capazes de encontrar soluções próximas para o PDC utilizando pouco tempo computacional. Além disto, quando comparados com o método exato, os métodos propostos são capazes de alcançar todas as soluções ótimas utilizando muito menos esforço computacional.

PALAVRAS CHAVE. Grafos com Arestas Rotuladas, Diâmetro Colorido, VNS.

Área Principal: MH – Metaheurísticas

ABSTRACT

Let $G = (V, E, L)$ be an edge-labeled graph in which V is the set of vertices of G, E is the set of edges, L is the set of labels (colors) on E and each edge $e \in E$ has a label $L(e)$ associated; The goal of the Colored Diameter Problem (CDP)is to find the smallest integer *k* so that there is a colored path with at most *k* colors for any pair $s, t \in V$. Carr et al. [2000] and Broersma et al. [2005] proves that the Minimum Colorful Path Problem (MCPP) is NP-Hard, and therefore, the CDP also it is. In this work, we propose two new methods for MCP resolution, both based on the meta-heuristic VNS. The computational experiments showed that the proposed methods are capable of finding close solutions to the CDP using low computational time. Moreover, when compared to the exact method, the proposed methods are able to achieve all optimal solutions using much less computational effort.

KEYWORDS. Edge-Labeled Graphs, Colored Diamater, VNS.

Main Area: MH - Metahuristics

https://proceedings.science/p/106912?lang=pt-br

1. Introdução

Nos últimos anos é possível observar um grande número de trabalhos sobre problemas definidos utilizando grafos com arestas rotuladas (GAR), tais como o Problema da Arvore Geradora com Rotulação Mínima [Silva et al., 2018] e o Problema do Árvore de Cobertura com Representação mínima [Linares et al., 2018]. Nesta classe de grafos, em vez de peso, cada aresta possui um rótulo associado, e para facilitar a visualização, é comum substituir os rótulos por cores. Por este motivo os termos rótulos e cores são usados de forma intercambiável neste trabalho.

Por outro lado, na teoria dos grafos, o termo distância é utilizado para representar o número de arestas no caminho mínimo entre dois vértices s e t, enquanto que o diâmetro de um grafo é dado pela maior distância entre quaisquer pares de vértices do grafo. Adicionalmente, no contexto de grafos com arestas rotuladas definem-se os conceitos de distância e diâmetro colorido.

Dado um GAR, a distância colorida entre os vértices s e t é o menor número de cores de modo que haja um caminho entre s e t utilizando apenas arestas com estas cores. Analogamente, o diâmetro colorido de um GAR é dado pela maior distância colorida entre quaisquer pares de vértices do grafo. O cálculo do diâmetro colorido tem aplicações relativas à caracterização de situações modeladas por grafos com arestas rotuladas. Por exemplo, uma rede sem fio pode ser modelada como um GAR de modo que as conexões entre os pontos de acesso sejam arestas cuja cor depende da frequência de transmissão utilizada. Neste caso, o diâmetro colorido representa o maior número de frequências diferentes necessário para transmissão de dados entre dois pontos de acesso.

Formalmente, um GAR é um grafo simples e não orientado $G = (V, E, L)$, sendo V o conjunto de vértices, E o conjunto de arestas, L o conjunto de rótulos (ou cores), e $l(e)$ uma função que retorna o rótulo associado à aresta e. Por sua vez, dado um GAR $G = (V, E, L)$ e um par de vértices $s, t \in V$, o Problema do Menor Caminho Colorido (PMCC) consiste em encontrar o menor conjunto de cores tal que s e t sejam conectados no grafo G considerando apenas as cores escolhidas. Por fim, dado um GAR $G = (V, E, L)$, o problema do diâmetro colorido (PDC) consiste em encontrar o menor inteiro k de modo que existe um caminho colorido com no máximo k cores para qualquer par $s, t \in V$. Segundo Carr et al. [2000] e Broersma et al. [2005], o PMCC é NP-Difícil, e por conseguinte, o problema do Diâmetro Colorido também é.

A Figura 1 ilustra os conceitos de GAR, o PMCC e o PDC. A Figura 1(a) ilustra um GAR G com 6 vértices, 7 arestas e 4 rótulos. As Figuras 1(b)-(i) ilustram os menores caminhos coloridos para todos os pares de vértices de G, exceto os vértices adjacentes, cujo menor caminho colorido é obviamente 1. Uma vez que a maior distância colorida entre os vértices de G é 2, este é o diâmetro colorido deste grafo. Observe, contudo, que o diâmetro deste grafo é 3, dado que o caminho entre 2 e 5 tem no mínimo 3 arestas.

Neste trabalho, propomos dois métodos baseados na meta-heurística VNS para a resolução do PDC. A primeira consiste em computar menor caminho colorido para cada par de vértices do GAR de entrada, obtendo assim o diâmetro colorido do grafo. A segunda é uma melhoria da primeira de modo a aproveitar soluções de um determinado para para outro, enquanto tenta reduzir o custo dos maiores caminhos coloridos. Além disto uma fase de pré-processamento é proposta. Por fim, os resultados são comparados com a solução ótima obtida por meio de uma formulação matemática.

https://proceedings.science/p/106912?lang=pt-br

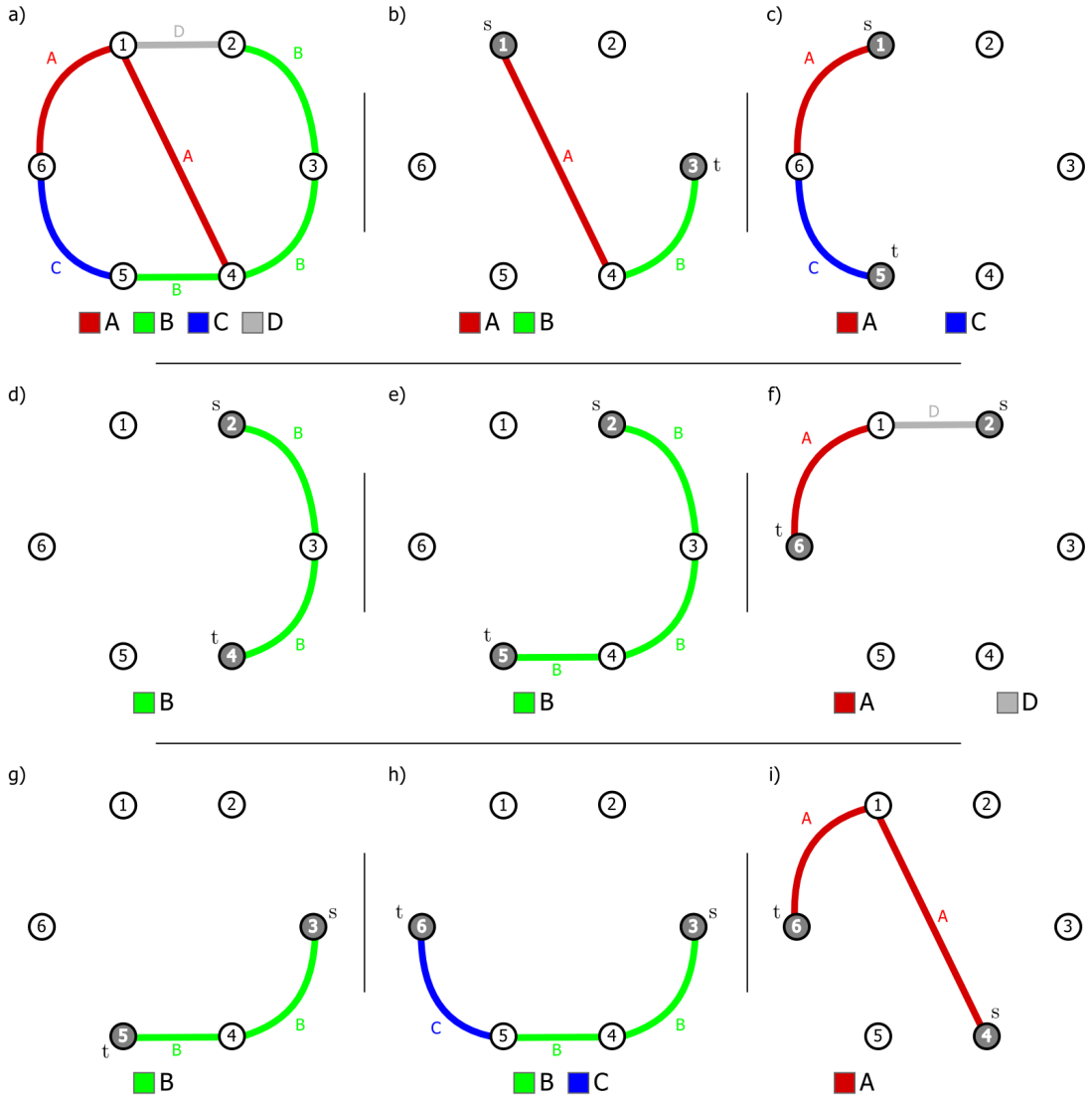

Figura 1: (a) Um pequeno GAR como Instância-exemplo para o PDC, (b) Menor caminho colorido entre 1 e 3, (c) Menor caminho colorido entre 1 e 5, (d) Menor caminho colorido entre 2 e 4, (e) Menor caminho colorido entre 2 e 5, (f) Menor caminho colorido entre 2 e 3, (g) Menor caminho colorido entre 3 e 5, (h) Menor caminho colorido entre 3 e 6, (i) Menor caminho colorido entre 4 e 6.

O restante deste trabalho está organizado como segue: a Seção 2 discute alguns trabalhos relacionados ao tema; a Seção 3 apresenta os métodos propostos; os experimentos computacionais são discutidos na Seção 4; enquanto que as considerações finais e propostas de trabalhos futuros são trazidos na Seção 5

2. Trabalhos relacionados

Podemos observar, na literatura, um interesse crescente em problemas definidos sobre GARs nos últimos anos. Dentre estes, o mais estudado é o Problema da Árvore de Cobertura de Rotulação Mínima [Silva et al., 2018], mas o Problema do Corte Colorido Global Mínimo [Faria et al., 2019; Bordini et al., 2017] também tem recebido bastante atenção nos últimos anos. Granata

et al. [2013] realizou uma revisão extensiva da literatura sobre problemas definidos sobre GARs, enquanto que Silva [2018] faz uma revisão abrangente sobre problemas de conectividade definidos utilizando este tipo de grafo.

O Problema do Menor Caminho Colorido foi proposto por Jacob et al. [1999]. Carr et al. [2000] demonstram que o PMCC é NP-difícil pela redução do *Red-Blue Set Cover* para o PMCC. De forma alternativa, Broersma et al. [2005] provam que o PMCC é NP-difícil pela redução polinomial do problema *3-SAT* para o PMCC. Yuan et al. [2005] propõem ainda uma nova prova de que o problema é NP-difícil pela redução do *Set Covering Problem*.

Yuan et al. [2005] também propuseram o primeiro modelo matemático para o PMCC, baseado em fluxo. Além disso, Yuan et al. [2005] introduzem duas heurísticas para o problema, denominadas Single-Path Color Reduction (SPCR) e Single-Path All Color Optimization Algorithm (SPACOA). Ambas heurísticas utilizam um algoritmo de menor caminho tradicional (como Dijkstra ou Bellman-Ford) e tentam, iterativamente, remover cores desnecessárias da solução encontrada.

Hassin et al. [2007] apresentam algoritmos aproximativos melhorados para o PMCC e para o Problema da Árvore de Cobertura com Rotulação Mínima, assim como resultados sobre a dificuldade (*hardness*) teórica destes problemas. Por sua vez, Fellows et al. [2010] estudam a complexidade parametrizada de diversos problemas definidos sobre GARs, dentre os quais o PMCC.

Por fim, Silva [2018] propõe um modelo de programação inteira baseado em cortes coloridos (denominado FBCC, Formulação Baseada em Cortes Coloridos) para o Problema da Árvore de Cobertura com Rotulação Mínima e adaptam este modelo para o PMCC. Como discutido em Silva [2018], dado um conjunto $S \subset V, S \neq \emptyset$, e seja $\delta(S)$ o conjunto de todas as arestas com um extremo em S e outro em $V \backslash S$, o corte colorido $K(S) = \bigcup_{e \in \delta(S)} l(e)$ representa o conjunto de todas as cores presentes no conjunto $\delta(S)$.

Com base no conceito de corte colorido, o programa (1-3) apresenta a FBCC adaptada para o PMCC. O modelo define apenas o conjunto de variáveis binárias $z_l \in \{0, 1\}$, sendo que $z_l = 1$ significa que toda aresta com rótulo l faz parte da solução. A função objetivo (1) minimiza o número de rótulos, e o conjunto exponencial de restrições (2) garante a conectividade dos vértices s e t no grafo solução, requerendo que exista pelo menos um rótulo ativo para todos os cortes que separam estes vértices. As expressões (3) definem o domínio das variáveis de decisão.

$$\text{Minimize} \sum_{l \in L} z_l \tag{1}$$

$$\text{s.t.} \quad \sum_{l \in K(S)} z_l \geq 1, \qquad \forall S \subset V, s \in S, t \notin S, \tag{2}$$

$$z_l \in \{0, 1\}, \qquad \forall l \in L. \tag{3}$$

3. Métodos propostos

Nesta Seção são apresentados os métodos propostos para o PDC. Em primeiro lugar, introduzimos uma rotina simples de pré-processamento com objetivo de reduzir os tempos computacionais dos procedimentos subsequentes. Em sequência, descrevemos uma heurística de construção, um procedimento baseado na meta-heurística VNS para o PMCC, apresentamos uma meta-heurística baseada no cálculo do menor caminho colorido entre todos os pares de vértices do grafo, e, por fim, propomos uma melhoria neste método para que o cálculo do diâmetro seja o foco do processamento.

https://proceedings.science/p/106912?lang=pt-br

3.1. Fase de pré-processamento

Uma vez que o diâmetro colorido de um GAR G depende das distâncias coloridas entre todos os pares de vértices de G, se faz necessária a resolução de $O(n^2)$ problemas. Para tentar diminuir este número de problemas, propomos computar todos os caminhos com 2 ou menos cores em uma fase de pré-processamento. Os Algoritmos 1 e 2 apresentam estes procedimentos.

Algoritmo 1: Vértices conectados usando um único rótulo

```
1 Procedimento L1 (G = (V, E, L))
2     Seja A^1 ← ∅ o conjunto de pares de vértices conectados por uma cor;
3     Para cada l ∈ L faça
4         Seja H^l o subgrafo de G apenas com as arestas de l;
5         Para cada par (s, t) ∈ V^2, s ≠ t faça
6             Se s está conectado a t em H^l então
7                 A^1 ← A^1 ∪ {(s, t)};
8     Retorne A^1;
```

Algoritmo 2: Vértices conectados usando dois rótulos

```
1 Procedimento L2 (G = (V, E, L), A^1)
2     Seja A^2 ← ∅ o conjunto de pares de vértices conectados por duas cores;
3     Para cada par (l, k) ∈ L^2, l ≠ k faça
4         Seja H^{l,k} o subgrafo de G apenas com as arestas de {l, k};
5         Para cada par (s, t) ∈ (V^2\A^1), s ≠ t faça
6             Se s está conectado a t em H^{l,k} então
7                 A^2 ← A^2 ∪ {(s, t)};
8     Retorne A^2;
```

O procedimento $L1$ consiste em construir todos os subgrafos com um rótulo apenas e verificar quais pares de vértices são conexos nestes subgrafos. Similarmente, o procedimento $L2$ constrói todos os subgrafos com dois rótulos. Utilizando estruturas de dados *Union-Find*, o procedimento $L1$ pode ser executado em $O(|L| \times \alpha(|E|, |V|) \times |E|)$, onde α representa o inverso da função de Ackermann. Por sua vez, o procedimento $L2$ tem complexidade de $|L|$ vezes a complexidade do procedimento $L1$.

3.2. Heurística de construção

A heurística de construção que propomos para o PMCC, e que será utilizada por ambas abordagens meta-heurísticas descritas subsequentemente, parte de um grafo vazio e, iterativamente, adiciona à solução o rótulo que possui mais arestas, desde que estas ajudem a conectar s a t. O Algoritmo 3 descreve este procedimento com mais detalhes. As linhas 2 e 3 realizam as inicializações necessárias. O laço das linhas 4 a 12 adiciona, a cada iteração, um rótulo à solução, até que s e t sejam conectados. Na linha 7 (9), os rótulos representados no corte da componente conexa maximal de s (t) são adicionados à lista de rótulos candidatos. Por fim, as linhas 10 à 12 atualizam o grafo H e adicionam o rótulo candidato com mais arestas à solução, quebrando os empates de forma aleatória.

Algoritmo 3: Heurística de Construção para o PMCC

```
1  Procedimento HC (G = (V, E, L), s, t)
2      Seja C ← ∅ o conjunto de rótulos da solução;
3      Seja H = (V, E' = ∅, C) um grafo vazio;
4      Enquanto s não conectado a t em H faça
5          Seja C' ← ∅ o conjunto de rótulos candidatos;
6          Seja V^s ⊆ V a componente conexa maximal de s em H;
7          C' ← C' ∪ K(V^s), onde K(V^s) é o corte colorido definido por V^s;
8          Seja V^t ⊆ V a componente conexa maximal de t em H;
9          C' ← C' ∪ K(V^t), onde K(V^t) é o corte colorido definido por V^t;
10         k ← o rótulo com maior número de arestas de C';
11         E' ← E' ∪ {todas as arestas com rótulo k};
12         C ← C ∪ k;
13     Retorne C;
```

3.3. Meta-heurística VNS para o PMCC

Nesta seção descrevemos o método baseado na meta-heurística VNS (do inglês, *Variable Neighborhood Search* [Mladenović e Hansen, 1997]) que propomos para a resolução do PMCC. Esta abordagem, detalhada no Algoritmo 4, serve como base para as meta-heurísticas propostas para a resolução do PDC. Após a inicialização realizada na linha 2, o laço das linhas 3-16 realiza múltiplos inícios do procedimento enquanto o tempo limite não é atingido. A heurística de construção HC é chamada na linha 4. As linhas 5-16 apresentam o laço principal da busca local, que é executado enquanto não for atingido o tempo limite e nem o limite estipulado para a profundidade da busca local. A ideia é adicionar k rótulos aleatoriamente à solução, e tentar retirá-los, em sequência aleatória, de modo que a solução permaneça viável.

Algoritmo 4: Meta-heurística VNS para o PMCC

```
1  Procedimento VNS (G = (V, E, L), s, t, tempoLimite)
2      Seja C* ← L a melhor solução encontrada;
3      Enquanto não atingir tempoLimite faça
4          C ← HC(G = (V, E, L), s, t);
5          C* ← Melhor( C*, C);
6          k ← 0;
7          Enquanto (2k < |L|) E (não atingir tempoLimite) faça
8              C' ← C ∪ { k rótulos selecionados aleatoriamente de |L|\C };
9              Para cada k ∈ C' em ordem aleatória faça
10                 C'' ← C'\{k};
11                 Se s está conectado a t em H = (V, E(C''), C'') então
12                     C' ← C''
13             Se C' melhor que C então
14                 C ← C';
15                 k ← 1;
16             C* ← Melhor( C*, C);
17     Retorne C*;
```

3.4. Meta-heurística ST-VNS para o PDC

A primeira meta-heurística que propomos para o PDC, denominada ST-VNS, consiste em calcular diretamente a distância rotulada mínima para cada par *s,t* de vértices, de maneira a retornar, ao final, a maior distância rotulada mínima. O Algoritmo 5 apresenta o procedimento ST-VNS. As linhas 2-4 realizam as inicializações necessárias, assim como a chamada aos procedimentos de pré-processamento. Enquanto que o laço das linhas 5-10 executa a meta-heurística VNS para resolver o PMCC para cada par de vértices do grafo de entrada.

Algoritmo 5: Meta-heurística ST-VNS para o PDC

```
1  Procedimento ST−VNS (G = (V, E, L), tempoTotal)
2      A^1 ← L1(G), A^2 ← L2(G, A^1);
3      S ← V^2 \ (A^1 ∪ A^2);
4      D ← Maior(A^1 ∪ A^2);
5      Para cada par (s, t) ∈ S, s ≠ t, em ordem aleatória faça
6          tempoRestante ← tempoTotal − tempoDecorrido;
7          T ← (tempoRestante / |S|);
8          D' ← VNS(G, s, t, T);
9          D ← Maior(D, D');
10         S ← S \ {(s, t)};
11     Retorne D;
```

3.5. Meta-heurística AP-VNS para o PDC

Baseado nos resultados obtidos pelo método ST-VNS, conseguimos observar que poderíamos efetuar duas melhorias neste, levando a um novo método, que denominamos AP-VNS. A primeira melhoria consiste em passar, para o VNS, uma tabela com as melhores soluções encontradas para cada par de vértices do grafo de entrada. Desta forma, sempre que este procedimento encontrar uma solução C para um par s-t, este pode verificar, para cada par u-v conexo nesta solução, se C é melhor que a melhor solução presente na tabela, atualizando-a. Desta forma, o procedimento VNS pode ser executado por mais tempo para os pares s-t cuja solução ainda não foi encontrada.

A segunda melhoria que propomos consiste em, uma vez que todos os pares de vértices do grafo de entrada já possuírem uma solução viável na tabela, utilizar o tempo restante com o objetivo direto de diminuir o valor do diâmetro computado. Para tal, implementamos uma busca probabilística para escolher o próximo par que será focado pela meta-heurística VNS, privilegiando a escolha de pares com maior distância rotulada. Seja $T(s,t)$ o valor da menor distância encontrada para o par (s,t) ao quadrado, e seja $\mathcal{T}$ a somatória de $T(s,t)$ para todos os pares s,t do grafo. A probabilidade de escolha de cada par s,t se dá por $T(s,t)\ /\ \mathcal{T}$.

Algoritmo 6 descreve o procedimento proposto. As linhas 2-4 realizam as inicializações necessárias, sendo D a tabela com as melhores distâncias encontradas, S' a lista de pares de vértices que não possuem nenhuma solução e S a lista de pares de vértices que passaram pelo pré-processamento, e que possuem, por conseguinte, distância colorida maior que dois. O laço as linhas 5-14 tenta aprimorar o valor encontrado para o diâmetro enquanto o tempo limite não é atingido. Caso ainda existam pares de vértices sem nenhuma solução, um destes é escolhido aleatoriamente como parâmetro para a meta-heurística do PMCC (linhas 7-10). Caso não haja nenhum par de vértices sem solução, selecionamos um par de forma probabilística, privilegiando aqueles com maior distância colorida, conforme discutido anteriormente (linhas 11-14).

https://proceedings.science/p/106912?lang=pt-br

Observe que alteramos o procedimento VNS para $VNSMOD$ nas linhas 10 e 14, visto que este é uma versão modificada do procedimento VNS apresentado no Algoritmo 4. Conforme discutido, as alterações são pequenas: dada uma solução C, o novo procedimento atualiza a tabela de soluções para todos os pares de vértices conectados em C, assim como remove de S' um par cuja solução seja encontrada pela primeira vez por este procedimento.

Algoritmo 6: Meta-heurística AP-VNS para o PDC

```
1  Procedimento AP−VNS (G = (V, E, L), tempoTotal)
2      A^1 ← L1(G), A^2 ← L2(G, A^1);
3      S' ← S ← V^2 \ (A^1 ∪ A^2), sendo V^2 o conjunto de todos os pares (s, t) ∈ V, s ≠ t;
4      Seja D uma tabela com as melhores soluções encontradas para cada par de vértices de
         G;
5      Enquanto não atingir tempoTotal faça
6          tempoRestante ← tempoTotal − tempoDecorrido;
7          Se S' ≠ ∅ então
8              Escolha um par (s, t) ∈ S' aleatoriamente;
9              T ← (tempoRestante / |S'|);
10             VNSMOD(G, s, t, T, S', D);
11         Se S' = ∅ então
12             Escolha um par (s, t) ∈ S probabilisticamente;
13             T ← (tempoRestante / |S|);
14             VNSMOD(G, s, t, T, S, D);
15     Retorne Maior(D);
```

4. Experimentos computacionais

Os métodos estudados neste trabalho foram desenvolvidos em linguagem C++, utilizando o compilador g++ versão 6.3.0 (opção de compilação -o), com o auxílio do resolvedor matemático CPLEX versão 12.8 para o método exato. Os experimentos computacionais foram executados em um computador com processador Intel Xeon e5-2609 (64 bits), com CPU contendo 4 cores de 2,40 GHz, além de 2 GB de RAM e executando o sistema operacional Debian Linux 9.4.

Para os experimentos realizados, GARs gerados de forma aleatória por Cerulli et al. [2005] foram utilizados. Para cada $n = |V| = 50, 100$, as instâncias possuem 90 grafos-problema. Cada conjunto consiste em 9 grupos de instâncias com distintas dimensões, o qual cada grupo é definido como uma combinação entre $|L| = \{\frac{n}{2}; n; \frac{5n}{4}\}$ e $d = \{ld = 0,2; md = 0,5; hd = 0,8\}$, d, de modo a representar a densidade do grafo. Cada grupo possui 10 instâncias distintas de mesma dimensão. Os métodos baseados na meta-heurística VNS foram executados 10 vezes para cada instância, visto que estes métodos possuem componentes aleatórios.

Dois grupos foram definidos para testes, sendo o primeiro com definições de quantidade de vértices, e o segundo com definições de quantidade de vértices e cores totais. Além disso, foram utilizados tempos limites para execução dos testes, proporcionais à quantidade de vértices destas instâncias. Para o primeiro grupo e para $|V| = 20, 30, 40, 50$, temos 10, 10, 15 e 20 segundos de limite, respectivamente. Já para o segundo grupo e para $|V| = 50, 100$, temos 30 e 60 segundos de limite, respectivamente, devido as variações de $|L|$ neste grupo.

A comparação dos resultados computacionais dos métodos propostos neste trabalho estão explicitadas nas tabelas de 1 a 3, cada linha representando um grupo de 10 instâncias de dimensão igual. Nestas tabelas temos o primeiro grupo de colunas representando os grupos de instancias

https://proceedings.science/p/106912?lang=pt-br

testados, sendo as colunas seguintes as do métodos testados. Os grupos de colunas FBCC, ST-VNS e AP-VNS representam, respectivamente, os resultados do método exato e dos métodos baseados na meta-heurística VNS. O primeiro grupo de colunas possui a média do diâmetro colorido para as 10 instâncias distintas de dimensão igual e o tempo gasto para encontrar seu resultado. Além disso, os outros dois métodos possuem a coluna *Best* representando o melhor resultado da média das 10 instâncias, a coluna *Av.* para o resultado médio obtido após executar as 10 instâncias 10 vezes, e, por fim, a coluna Tempo para o tempo obtido para em seguidos ter o melhor resultado.

Tabela 1: Resultados para grafos com $|V| \in \{20, 30, 40, 50\}$ do grupo 1

		FBCC		**ST-VNS**			**AP-VNS**		
$\|V\|$	**d**	**Opt.**	**Time**	**Best**	**Av.**	**Time**	**Best**	**Av.**	**Tempo**
20	hd	2	0.462	**2**	**2**	**0.009**	**2**	**2**	**0.009**
	md	2	0.605	**2**	**2**	**0.010**	**2**	**2**	**0.010**
	ld	3.5	0.952	**3.5**	3.7	**0.164**	**3.5**	**3.59**	3.843
30	hd	2	1.155	**2**	**2**	**0.018**	**2**	**2**	**0.018**
	md	2	1.536	**2**	**2**	**0.015**	**2**	**2**	**0.015**
	ld	3.1	3.166	3.3	3.53	**0.289**	**3.1**	**3.46**	1.101
40	hd	2	2.225	**2**	**2**	**0.032**	**2**	**2**	**0.032**
	md	2	3.450	**2**	**2**	**0.023**	**2**	**2**	**0.023**
	ld	2.8	6.954	3.1	3.23	**0.307**	**2.8**	**3.08**	0.959
50	hd	2	3.780	**2**	**2**	**0.045**	**2**	**2**	**0.045**
	md	2	5.975	**2**	**2**	**0.035**	**2**	**2**	**0.035**
	ld	3	14.171	3.2	3.27	**0.386**	**3**	**3.17**	0.647

Pode ser observado que o método ST-VNS chega próximo do diâmetro colorido ótimo na média das instâncias, na primeira tabela,relacionada ao grupo 1 de instâncias, com uma diferença máxima de apenas 0.3. O pré-cálculo é bastante efetivo nestas instâncias, visto que consegue o resultado ótimo em situações as quais o diâmetro será 2, como nas instâncias de $d = md, hd$. É notório que, apesar do tempo da melhor solução no método AP-VNS ser maior, este consegue chegar ao diâmetro colorido ótimo em todas estas instâncias e com uma média razoável.

Na segunda tabela, relacionada ao grupo 2 de instâncias, é interessante destacar que as instâncias de $d = md, hd$ com $|L| = 12$ são respondidas já na primeira fase do pré-cálculo, além das instâncias de $|L| = 25$ com $d = hd$, com tempo de execução consideravelmente menor que o método exato. Novamente, o método AP-VNS consegue chegar ao diâmetro colorido ótimo nas suas melhores execuções, com variações pequenas na média das 10 execuções. O método ST-VNS consegue ter resultados bem próximos do ótimo, e desta vez possui uma diferença máxima de 0.2 na sua melhor média de execução.

Por fim, ao analisar os resultados dos grafos com $|V| = 100$ da tabela 3, temos os resultados ótimos atingidos em todos os testes das meta-heurísticas. As melhorias proporcionadas pelo método AP-VNS em relação ao ST-VNS, nesta comparação, foram de menor importância justamente pelo segundo já ter obtido os resultados satisfatórios. Mesmo assim, os tempos, ao final, foram bem próximos.

5. Considerações finais e proposta de trabalhos futuros

Neste trabalho, propomos duas meta-heurísticas baseadas em VNS para o Problema do Diâmetro Colorido. Ambas propõem um pré-cálculo inicial das distâncias mínimas em pares $s - t$

Tabela 2: Resultados para grafos com $|V| = 50$ do grupo 2

		FBCC		ST-VNS			AP-VNS		
$\|L\|$	d	Opt.	Time	Best	Av.	Time	Best	Av.	Tempo
	hd	1	2.467	**1**	**1**	0.025	**1**	**1**	**0.006**
12	**md**	1	2.451	**1**	**1**	0.028	**1**	**1**	**0.015**
	ld	2	3.371	**2**	**2**	**0.016**	**2**	**2**	**0.016**
	hd	1	2.650	**1**	**1**	**0.025**	**1**	**1**	**0.025**
25	**md**	2	3.182	**2**	**2**	**0.028**	**2**	**2**	**0.028**
	ld	2.6	5.869	**2.6**	**2.6**	0.121	**2.6**	**2.6**	**0.107**
	hd	2	3.824	**2**	**2**	**0.046**	**2**	**2**	**0.046**
50	**md**	2	6.033	**2**	**2**	**0.035**	**2**	**2**	**0.035**
	ld	3	14.264	**3**	3.18	**0.377**	**3**	**3.12**	1.258
	hd	2	4.584	**2**	**2**	**0.048**	**2**	**2**	**0.048**
62	**md**	2	6.597	**2**	**2**	**0.036**	**2**	**2**	**0.036**
	ld	3	18.239	3.2	3.32	**0.568**	**3**	**3.22**	1.395

Tabela 3: Resultados para grafos com $|V| = 100$ do grupo 2

		FBCC		ST-VNS			AP-VNS		
$\|L\|$	d	Opt.	Time	Best	Av.	Time	Best	Av.	Tempo
	hd	1	9.295	**1**	**1**	**0.018**	**1**	**1**	**0.018**
25	**md**	1	9.257	**1**	**1**	**0.080**	**1**	**1**	**0.080**
	ld	2	16.055	**2**	**2**	**0.058**	**2**	**2**	**0.058**
	hd	1	9.836	**1**	**1**	**0.110**	**1**	**1**	**0.110**
50	**md**	2	14.859	**2**	**2**	**0.049**	**2**	**2**	**0.049**
	ld	2.2	44.614	**2.2**	**2.2**	**0.074**	**2.2**	**2.2**	0.090
	hd	2	25.493	**2**	**2**	**0.111**	**2**	**2**	**0.111**
100	**md**	2	46.568	**2**	**2**	**0.087**	**2**	**2**	**0.087**
	ld	2.7	173.910	**2.7**	**2.7**	0.562	**2.7**	**2.7**	**0.553**
	hd	2	38.164	**2**	**2**	**0.114**	**2**	**2**	**0.114**
120	**md**	2	67.177	**2**	**2**	**0.089**	**2**	**2**	**0.089**
	ld	2.8	273.663	**2.8**	**2.8**	**1.470**	**2.8**	**2.8**	1.738

para uma e duas cores. A primeira meta-heurística, ST-VNS, calcula a distância colorida entre todos os pares, construindo a solução a partir do VNS e da estrutura de dados *Union-Find*, com melhorias de busca local a posteriori. Já a segunda meta-heurística, AP-VNS, compromete-se a resolver o problema sem necessariamente calcular a menor distância colorida entre todos os pares, forçando este cálculo apenas para os pares que mais precisam e reaproveitando as soluções destes para verificar se estas também servem para os outros. Também foi implementado um método exato, de maneira a servir como comparação de resultados para os métodos.

Ao fim, foram executados testes computacionais os quais demonstraram que os métodos propostos são capazes de solucionar instâncias de pequeno e médio porte com pequeno esforço computacional, quando comparados ao tempo de execução do método exato. O método ST-VNS consegue aproximações satisfatórias ao encontrar o diâmetro colorido, entretanto, o método AP-VNS tem vantagem em relação a este aspecto, visto que consegue os resultados ótimos em seus melhores resultados em todos os testes realizados.

Como planejamentos de trabalhos futuros, pretendemos melhorar as instâncias que temos, visto que àquelas que possuem densidade média e alta são todas resolvidas já a partir da fase de pré-cálculo. Sendo assim, os métodos podem ser comparados de maneira mais eficiente com instâncias de maior quantidade de vértices, além de uma relação $\frac{|V|}{|L|}$ menor. Além disso, pretendemos investigar novas abordagens de heurísticas para o problema, tais como Algoritmos Genéticos e Colônia de Formigas.

Referências

Bordini, A., Protti, F., Silva, T. G., e Filho, G. F. d. S. (2017). New algorithms for the minimum coloring cut problem. *International Transactions in Operational Research*.

Broersma, H., Li, X., Li, X., Woeginger, G., e Zhang, S. (2005). Paths and cycles in colored graphs. *Australasian journal of combinatorics*, 31(1):299–311. ISSN 1034-4942.

Carr, R. D., Doddi, S., Konjevod, G., e Marathe, M. (2000). On the red-blue set cover problem. In *Proceedings of the Eleventh Annual ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms*, SODA '00, p. 345–353, Philadelphia, PA, USA. Society for Industrial and Applied Mathematics. ISBN 0-89871-453-2.

Cerulli, R., Fink, A., e Gentili, S., Monica e Voß (2005). Metaheuristics comparison for the minimum labelling spanning tree problem. In Golden, B., Raghavan, S., e Wasil, E., editors, *The Next Wave in Computing, Optimization, and Decision Technologies*, volume 29 of *Operations Research/Computer Science Interfaces Series*, p. 93–106. Springer US. ISBN 978-0-387-23528-8. URL http://dx.doi.org/10.1007/0-387-23529-9_7.

Faria, L., Klein, S., Sau, I., Souza, U. S., e Sucupira, R. (2019). Maximum cuts in edge-colored graphs. *Discrete Applied Mathematics*.

Fellows, M. R., Guo, J., e Kanj, I. (2010). The parameterized complexity of some minimum label problems. *Journal of Computer and System Sciences*, 76(8):727–740.

Granata, D., Cerulli, R., Scutellà, M. G., e Raiconi, A. (2013). Maximum flow problems and an np-complete variant on edge-labeled graphs. In *Handbook of Combinatorial Optimization*, p. 1913–1948. Springer.

https://proceedings.science/p/106912?lang=pt-br

Hassin, R., Monnot, J., e Segev, D. (2007). Approximation algorithms and hardness results for labeled connectivity problems. *Journal of Combinatorial Optimization*, 14(4):437–453.

Jacob, R., Koniedov, G., Krumke, S., Marathe, M., Ravi, R., e Wirth, H. (1999). The minimum label path problem. *Unpublished manuscript, Los Alamos National Laboratory*.

Linares, E. D. Z., Satoru, L., Silva, T. G., e Interian, R. (2018). The minimum representation spanning tree problem. *Anais do Simpósio Brasileiro de Pesquisa Operacional*, 274.

Mladenović, N. e Hansen, P. (1997). Variable neighborhood search. *Computers & Operations Research*, 24(11):1097 – 1100. ISSN 0305-0548. URL `http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0305054897000312`.

Silva, T. G. (2018). *The minimum labeling spanning tree and related problems*. PhD thesis, Universidade Federal Fluminense.

Silva, T. G. d., Queiroga, E., Ochi, L. S., Cabral, L., Gueye, S., e Michelon, P. (2018). A hybrid metaheuristic for the minimum labeling spanning tree problem. *European Journal of Operational Research*, 274.

Yuan, S., Varma, S., e Jue, J. P. (2005). Minimum-color path problems for reliability in mesh networks. In *Proceedings IEEE 24th Annual Joint Conference of the IEEE Computer and Communications Societies.*, volume 4, p. 2658–2669. IEEE.

https://proceedings.science/p/106912?lang=pt-br