LI Simpósio Brasileiro de Pesquisa Operacional
Limeira–SP, 02 a 06 de setembro de 2019

BRKGA COM BUSCA LOCAL APLICADO AO PROBLEMA DA DIVERSIDADE MÁXIMA

Geiza Cristina da Silva

André Leite

Raydonal Ospina

{geiza, leite, raydonal}@de.ufpe.br

Universidade Federal do Pernambuco
Av. Prof. Moraes Rego, 1235 - Cidade Universitária, Recife

RESUMO

O Problema da Diversidade Máxima tem como objetivo selecionar, a partir de um conjunto de elementos, um subconjunto com um número pré-estabelecido de elementos que tenham a maior diversidade possível entre eles. Por se tratar de um problema pertencente à classe NP-Difícil a aplicação de algoritmos que gerem boas soluções em tempo computacional aceitável torna-se altamente desejável.

Neste trabalho propomos um novo algoritmo baseado na metaheurística BRKGA que inclui a aplicação de uma busca local para melhoramento das soluções geradas pelo método.

O estudo computacional envolvendo um amplo conjunto de instâncias da MDPLib mostra que o algoritmo proposto apresenta desempenho médio superior quando comparado com os melhores resultados conhecidos disponíveis na literatura.

PALAVRAS CHAVE. Problema da diversidade máxima. BRKGA. Algoritmos Evolutivos.

MH - Metaheurísticas, OC - Otimização Combinatória

ABSTRACT

The Maximum Diversity Problem is to select, from a set of elements, a subset with a pre-established number of elements that have the greater diversity among them. MDP is an NP-hard problem and the application of algorithms that generate good solutions in acceptable computational time becomes highly desirable.

In this work we propose a new algorithm based on the BRKGA metaheuristic that includes the application of a local search to improve the solutions generated by the method.

The computational study involving a large set of MDPLib instances shows that the proposed algorithm presents higher average performance when compared to best known results available in the literature.

KEYWORDS. Maximum diversity problem. BRKGA. Evolutionary algorithms.

MH - Metaheuristics, CO - Combinatorial Optimization

https://proceedings.science/p/106909?lang=pt-br

1. Introdução

O Problema da Diversidade Máxima (PDM) consiste em, dado um conjunto N de n elementos, selecionar um subconjunto M ($M \subseteq N$) de diversidade máxima. A diversidade total é definida como a soma das diversidades entre todos os pares de elementos de M. Como medida de diversidade pode ser utilizada a distância entre os elementos, e esta, calculada a partir de determinadas características (atributos) dos elementos de N.

Na definição do problema considere o conjunto $N = \{1, 2, \ldots, n\}$ com n elementos, cada um caracterizado por um conjunto de atributos $T = \{1, \ldots, t\}$; a_{ik}, o valor do atributo $k \in T$ do elemento $i \in N$ e $d(i, j)$ o índice de diversidade entre dois elementos distintos i e j que possuem os respectivos valores de atributos $(a_{i1}, a_{i2}, \ldots a_{it})$ e $(a_{j1}, a_{j2}, \ldots a_{jt})$. O índice de diversidade representa o grau de diferença existente entre os atributos dos elementos i e j, ou seja, a distância entre eles, que deve ser calculada usando-se uma dentre as métricas de distâncias existentes. De acordo com a área de aplicação, uma métrica pode refletir melhor o problema que outra [Kochenberger e Glover, 1999]. [Kuo et al., 1993] demostraram que o PDM pertence à classe NP-Difícil sendo portanto altamente desejável a aplicação de algoritmos que gerem boas soluções em tempo computacional aceitável.

Uma metaheurística é um método que guia outras heurísticas a fim de encontrar soluções factíveis para problemas particulares. Dentre as metaheurísticas mais conhecidas e aplicadas estão os Algoritmos Evolutivos [Fogel, 1994] que tem por representante mais popular, o Algoritmo Genético (AG) [Reinhold, 1991]. Recente, a BRKGA (*Biased Random-Key Genetic Algorithm*) [Gonçalves e Resende, 2011] é, de igual modo, representante desta classe podendo ser aplicada a problemas de otimização discreta e global. Tem seus fundamentos baseados no algoritmo de chaves aleatórias de [Bean, 1994], o RKGA (*Random-Key Genetic Algorithms*), diferindo na forma que os pais são selecionados para cruzamento e como este é implementado.

As próximas seções deste artigo estão organizadas conforme segue. A seção 2 trata de definições e do estado da arte do PDM. Na seção 3 é discutida a metodologia proposta. A seção 4 apresenta os resultados computacionais e finalmente, a seção 5 conclui o trabalho.

2. O Problema da Diversidade Máxima

O Problema da Diversidade Máxima é muito estudado na literatura devido a seu grande potencial de aplicações tais como: administração de recursos e formação de grupos de projetos [Weitz e Lakshminarayanan, 1998; Dhir et al., 1994]; biologia [Agrafiotis, 1997], preservação ecológica [Maser, 1999; Pearce, 1987; Unkel, 1985] e outras áreas [Zhou e Giannakis, 2001].

O primeiro trabalho a ter a maximização da diversidade como objetivo específico data de 1977 e foi escrito por [Glover et al., 1977]. Foi proposta uma heurística e testada com dados de um programa de seleção de recursos genéticos.

Em 1993, Kuo et al. [1993] apresentaram formulações matemáticas para o PDM e provaram que o problema é NP-Difícil. O PDM pode ser descrito como um problema de programação quadrática inteira considerando-se: $x_i, \forall i \in N$, uma variável binária igual a 1, se e somente se, o elemento i estiver na solução e 0, caso contrário e $D[n \times n]$, uma matriz que armazena os índices de diversidade entre cada par de elementos de N, preenchida da seguinte maneira: $d(i, j) = d(j, i)$ e $d(i, i) = 0, \forall (i, j) \in N$.

Maximizar

https://proceedings.science/p/106909?lang=pt-br

$$\sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^{n} d(i,j) \cdot x_i \cdot x_j, \tag{1}$$

sujeito a:

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = m, \tag{2}$$

$$x_i \in \{0,1\}, \forall i = 1, ..., n. \tag{3}$$

Na formulação descrita em (1) a (3), a função objetivo quadrática (1) tem como meta maximizar a soma das diversidades de um subconjunto com m elementos de N. A igualdade (2) exige que exatamente m elementos estejam em uma solução viável e (3) indica que as variáveis do problema devem ser binárias.

A diversidade a ser maximizada diz respeito ao valor numérico que corresponde ao grau de diferença existente entre os atributos dos elementos i e j, que pode ser medido, por exemplo, pela distância entre eles calculada usando uma determinada métrica. Se, por exemplo, for utilizada a distância euclidiana para o cálculo do índice de diversidade, $d(i,j)$ é computado conforme descrito na equação (4).

$$d(i,j) = \sqrt{\sum_{k=1}^{t} (a_{ik} - a_{jk})^2}, \tag{4}$$

em que, a_{ik} é o valor do atributo $k \in T$ do elemento $i \in N$ e $d(i,j)$ o índice de diversidade entre os elementos i e j , $i \neq j$ que possuem os respectivos valores de atributos $(a_{i1}, a_{i2}, \ldots a_{it})$ e $(a_{j1}, a_{j2}, \ldots a_{jt})$.

Muitos trabalhos endereçando o problema têm sido publicados ao longo dos anos desde sua definição incluindo as mais diversas metaheurísticas como: *Greedy Randomized Adaptive Search Procedure* - GRASP [Ghosh, 1996; Andrade, 2003; Silva et al., 2004, 2007; Duarte e Martí, 2007], Busca Tabu [Duarte e Martí, 2007; Palubeckis, 2007; Aringhieri et al., 2008; Wang et al., 2014], *Variable Neighborhood Search* - VNS [Brimberg et al., 2009; Aringhieri e Cordone, 2011], Redes Neurais [Wang et al., 2009] entre outras.

Um trabalho de muita relevância na literatura foi proposto por [Martí et al., 2013]. O destaque é a comparação de todas as heurísticas e metaheurísticas até então propostas na literatura para o PDM. Além disso, foi apresentada a MDPLib, que reúne 315 instâncias do problema propostas por diversos autores e relaciona também as melhores soluções conhecidas para essas instâncias. Esses limites inferiores são frequentemente utilizados para avaliar a qualidade de novos algoritmos, como fazemos neste trabalho.

Recentemente duas heurísticas baseadas na metaheurística BRKGA foram propostas para o PDM: [Moro, 2017] compara um algoritmo GRASP com *Path Relinking* com BRKGA e verifica que o primeiro método performa o segundo. Já [Brito et al., 2018], propõe uma heurística BRKGA com busca local e compara os resultados com os de [Moro, 2017] verificando que seu método é o mais eficiente para obter soluções para o problema.

https://proceedings.science/p/106909?lang=pt-br

3. A metaheurística BRKGA

A BRKGA é uma metaheurística para resolver problemas de otimização discreta e global proposta por [Gonçalves e Resende, 2011]. Consiste de uma variação do RKGA desenvolvido por [Bean, 1994]. Ambos, tem soluções representadas por meio de vetores de chaves aleatórias. Uma chave aleatória é um número real gerado no intervalo contínuo $[0, 1)$.

Com isso, a distinção entre o funcionamento desses métodos e a obtenção de soluções para o problema de otimização a ser tratado é bem clara. São portanto algoritmos de propósito geral. As especificidades do problema abordado são trazidas por meio de um algoritmo de propósito específico que mapeia um vetor de chaves aleatórias em uma solução do problema e que calcula a função objetivo, chamado de decodificador.

Mais especificamente, o método considera uma população com p indivíduos. Cada indivíduo é representado por um cromossomo. Um cromossomo é formado por genes e tem um *fitness* que corresponde ao valor da função objetivo relativa ao problema representado. Além disso, um cromossomo é um vetor de chaves aleatórias. Isto é, cada alelo, que é o valor contido em um gene, é gerado aleatoriamente no intervalo contínuo $[0, 1)$.

Na fase de inicialização do BRKGA (indiferente para o RKGA) uma população inicial é criada e o *fitness* de cada cromossomo é calculado pelo decodificador. A população é particionada em p_e indivíduos elite com melhores *fitness* e $p - p_e$ indivíduos restantes, os indivíduos não elite. Devemos ter $p_e < p - p_e$.

O algoritmo evolui seus indivíduos por um número de iterações, chamado gerações. Há três mecanismos no processo de evolução:

O **elitismo** adotado pelo BRKGA, a exemplo do que ocorre no RKGA, copia da geração q para a geração $q + 1$ todos os p_e indivíduos elite. Isto garante com que, de uma geração para outra, nunca haja piora em relação a melhor solução do método.

Outra estratégia de evolução da população é a **mutação**. Um número pequeno de indivíduos mutantes, p_m, e introduzido na população da próxima geração. Um mutante é um novo vetor de chaves aleatórias, que segue o mesmo processo de criação dos indivíduos da população inicial.

Em seguida, a operação de **cruzamento** produz os demais $p-p_e-p_m$ indivíduos da população para a geração $q+1$. Aqui ocorre a principal distinção entre os algoritmos RKGA e BRKGA, a seleção dos pais. No RKGA dois pais são selecionados aleatoriamente da população inteira para produzir descendentes. No BRKGA a seleção também é aleatória. Cada novo indivíduo é gerado combinando um pai selecionado dentre os indivíduos elite e o segundo pai dentre os indivíduos não elite, ou da população inteira, em alguns casos. A geração do descendente é feita utilizando-se um parâmetro $\rho_e > 1/2$ a ser escolhido na implementação do método. ρ_e é a probabilidade que o descendente herde o alelo do pai elite. Assim, para cada gene de um cromossomo de n genes, isto é, para $i = 1 \ldots n$, o i-ésimo alelo do descendente será o i-ésimo alelo do cromossomo do pai elite com probabilidade ρ_e e corresponderá ao i-ésimo alelo do pai não elite com probabilidade $1 - \rho_e$.

Por fim, são calculados os *fitness* dos cromossomos gerados e uma nova iteração é iniciada.

4. O algoritmo BRKGA proposto para o PDM

Pelo exposto na seção anterior, pode-se concluir que o BRKGA tem a representação dos cromossomos e processo de evolução da população bastante independente do conhecimento do problema de otimização a ser tratado.

[Toso e Resende, 2012] propuseram um API (*Application Programming Interface*) implementado em C++ para o algoritmo BRKGA. O API é de código aberto e disponibilizado em `http://mauricio.resende.info/src/brkgaAPI/`. Esse API permite paralelizar parte das operações como a decodificação de soluções e a evolução de múltiplas populações independentemente uma das outras com troca de soluções entre elas.

Neste trabalho, propõe-se um BRKGA para o PDM utilizando-se o API de [Toso e Resende, 2012]. O algoritmo decodificador proposto neste trabalho transforma uma solução do método em solução do PDM ordenando o vetor de chaves aleatórias de n posições e selecionando os m primeiros índices para compor a solução. A Figura 1 exemplifica a transformação. A partir de um vetor de chaves aleatórias, é obtido um novo vetor auxiliar com as chaves ordenadas, preservando os índices. Em nosso exemplo, a solução do PDM é $M = \{0, 3, 7, 4, 1\}$.

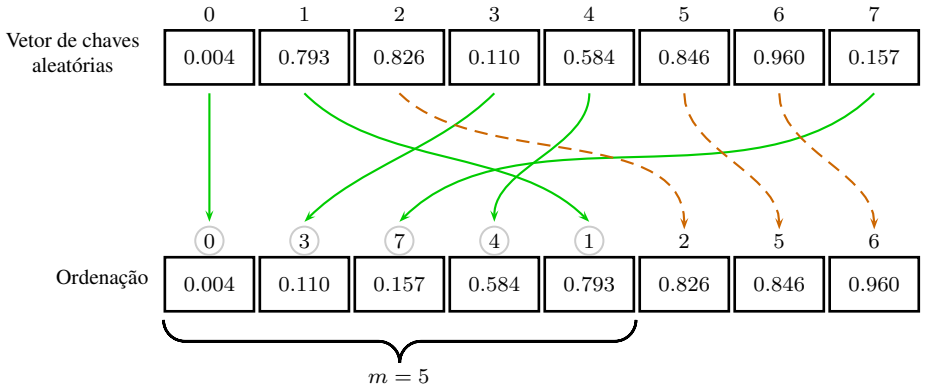


Figura 1: Exemplo de decodificação

Considere M a solução obtida da decodificação, o cálculo da função objetivo é feito utilizando-se a Equação (5).

$$\text{fitness} = \sum_{i=1}^{m-1} \sum_{j=i}^{m} d(i,j). \tag{5}$$

Pela característica da metodologia utilizada, não há garantias que as soluções encontradas durante as gerações do método correspondam a ótimos locais. Por este motivo, neste trabalho, uma busca local é realizada ao final de cada geração, na melhor solução encontrada. Para evitar que haja interferência no funcionamento do método a solução retornada pela busca local não é incluída na próxima geração da BRKGA. Ela é armazenada como melhor solução do método caso seu valor de função objetivo seja maior do que o da melhor solução atual.

Neste trabalho, a busca local de [Ghosh, 1996] foi modificada para uma versão de primeiro de melhora. Considere dois elementos $i \in M$ e $j \in N - M$ e $\Delta z(i,j) = \sum_{u \in M-i} d(j,u) - d(i,u)$ a melhoria devida a troca de i e j. Se, para todo i e j, $\Delta z \leqslant 0$ a busca é encerrada. Senão, para cada

elemento i e j se $\Delta z > 0$ é feita a troca dos elementos i e j e a busca local é reiniciada utilizando a solução obtida.

5. Resultados Computacionais

O algoritmo proposto, denotado por BRKGALS, foi implementado usando linguagem `C++` e compilado na versão 8.2.0 do `GCC` utilizando a opção `-fopenmp` para habilitar o processamento paralelo da API. Os testes foram realizados em um computador `Intel i7-4770` de 3.4GHz 8 núcleos e 16GB de memória RAM rodando Ubuntu 18.10.

Para avaliar a performance do BRKGALS foram utilizadas 100 instâncias da literatura de médio e largo porte, conhecidas como MDG, parte da MDPLib. Neste conjunto de dados, matrizes de números reais foram geradas aleatoriamente no intervalo de 0-10 de uma distribuição uniforme. As instâncias são divididas em três grupos:

MDG-a: 40 matrizes geradas por Duarte e Martí [2007], 20 delas com $n = 500, m = 50$ e, as outras 20, com $n = 2000, m = 200$.

MDG-b: Similarmente a MDG-a, consiste de 40 matrizes geradas por Duarte e Martí [2007], 20 delas com $n = 500, m = 50$ e, as outras 20, com $n = 2000, m = 200$.

MDG-c: 20 matrizes geradas em Martí et al. [2013] com $n = 3000$ e $m = 300, 400, 500$ e 600.

Para efeito de avaliação, os resultados obtidos pelo BRKGALS são comparados com os melhores resultados conhecidos na literatura e ainda com duas implementações de BRKGA para o PDM: BRKGAAM [Moro, 2017] e BRKGAPDM [Brito et al., 2018].

Conforme os experimentos realizados em Brito et al. [2018], utilizamos como critério de parada para o BRKGALS número máximo de gerações sem melhora $G_{SemMel} = 500$ e tempo máximo de processamento $MaxTempo = 7200$ segundos (aproximadamente 2h). Além disso, adotamos os mesmos parâmetros do método, a saber:

Tamanho da população (p)	150
Número de indivíduos elite (p_e)	$0{,}2p$
Número de indivíduos mutantes (p_m)	$0{,}2p$
Probabilidade do descendente herdar alelo do pai elite (ρ_e)	0,75
Número de populações (K)	3

O algoritmo proposto foi executado 10 vezes para cada instância, com diferentes sementes de números aleatórios e os resultados obtidos são os relatados a seguir.

As Tabelas 1 e 2 apresentam os resultados para as instâncias do tipo MDG-a com $n = 500$ e $m = 50$ e $n = 2000$ e $m = 200$, respectivamente. Para cada instância identificada na primeira coluna, a coluna 2 apresenta a diferença percentual dada por:

$$\text{Desvio} = 100 \cdot (S_{\text{BRKGALS}} - S_{\text{Best}})/S_{\text{Best}},$$

em que S_{BRKGALS} é a melhor solução obtida de 10 execuções do algoritmo proposto e S_{Best} é a melhor solução conhecida na literatura (coluna 5). As colunas 3 (BRKGAM) e 4 (BRKAPDM) reproduzem as diferenças percentuais apresentadas, respectivamente, por Moro [2017] e Brito et al. [2018].

Tabela 1: Comparação dos métodos para as instâncias MDG-a ($n = 500, m = 50$). Desvios em %.

MDG	BRKGALS	BRKGAM	BRKGAPDM	Target
a-1	**0,00**	0,68	**0,00**	7.833,83
a-2	**0,00**	0,80	0,28	7.771,66
a-3	**0,12**	0,65	0,19	7.759,36
a-4	**0,00**	1,07	0,07	7.770,24
a-5	**0,00**	1,05	0,09	7.755,23
a-6	0,14	0,43	**0,00**	7.773,71
a-7	**0,00**	0,56	**0,00**	7.771,73
a-8	**0,12**	0,44	0,15	7.750,88
a-9	**0,00**	0,45	0,16	7.770,07
a-10	**0,02**	0,80	**0,02**	7.780,35
a-11	0,14	0,96	**0,13**	7.770,95
a-12	**0,00**	0,57	0,09	7.757,65
a-13	**0,06**	1,25	0,22	7.798,43
a-14	0,05	0,56	**0,00**	7.795,63
a-15	**0,00**	0,84	0,30	7.736,84
a-16	**0,07**	0,52	0,27	7.792,77
a-17	0,02	1,27	**0,00**	7.787,20
a-18	0,04	0,70	**0,00**	7.756,26
a-19	**0,06**	1,01	0,14	7.755,41
a-20	**0,13**	0,63	0,14	7.733,86

Podemos observar que o algoritmo proposto apresenta uma performance média acima dos demais algoritmos. No caso das instâncias $n = 500$ e $m = 50$ a média das diferenças percentuais é de 0,05, 0,76 e 0,11 para os algoritmos BRKGALS, BRKGAM e BRKGAPDM, respectivamente. Para as instâncias de maior porte, $n = 2000$ e $m = 200$, o BRKGALS mantém-se com resultados superiores. A média dos desvios para os algoritmos BRKGALS, BRKGAM e BRKGAPDM é de 0,33, 0,50 e 1,19, respectivamente.

Em relação à tempo computacional, as instâncias MDG-a $n = 500$ e $m = 50$ tiveram tempo médio de execução de 82 segundos aproximadamente. Já nas instâncias de maior porte, como era esperado, a média de tempo é de aproximadamente $7200s$, tempo máximo determinado como critério de parada.

A Figura 2 e 3 complementa a análise apresentando o comportamento dos métodos nas instâncias MDG-a $n = 500, m = 50$ e $n = 2000, m = 200$, respectivamente. Os gráficos de *box-plot* foram gerados a partir das 10 execuções do algoritmo proposto. Os demais pontos representam os algoritmos da literatura.

Nas demais instâncias o algoritmo proposto preserva sua capacidade de obter soluções de maior qualidade para o PDM em comparação aos algoritmos da literatura. As Tabelas 3 e 4 apresentam as médias das diferenças percentuais do algoritmo proposto e os da literatura para as

Tabela 2: Comparação dos métodos para as instâncias MDG-a ($n = 2000, m = 200$). Desvios em %.

MDG	BRKGALS	BRKGAM	BRKGAPDM	Target
a-21	**0,42**	1,17	0,51	114.259,00
a-22	**0,48**	1,39	0,58	114.327,00
a-23	**0,32**	1,11	0,54	114.123,00
a-24	**0,33**	1,21	0,53	114.040,00
a-25	**0,33**	1,04	0,48	114.064,00
a-26	**0,23**	1,06	0,33	114.204,00
a-27	**0,38**	1,35	0,70	114.338,00
a-28	**0,33**	1,30	0,48	114.158,00
a-29	**0,15**	1,28	0,34	114.132,00
a-30	**0,33**	1,31	0,39	114.197,00
a-31	**0,39**	1,16	0,45	114.139,00
a-32	**0,38**	0,96	0,52	114.092,00
a-33	**0,27**	1,37	0,57	114.124,00
a-34	**0,43**	1,06	0,83	114.203,00
a-35	**0,31**	1,08	0,51	114.180,00
a-36	**0,29**	1,28	0,61	114.252,00
a-37	**0,38**	1,13	0,49	114.213,00
a-38	**0,20**	1,15	0,27	114.378,00
a-39	**0,27**	1,46	0,52	114.201,00
a-40	0,27	1,17	**0,23**	114.191,00

instâncias de médio e grande porte do tipo MDG-b e MDG-c, respectivamente. Na Tabela 4 a comparação não inclui o algoritmo da literatura BRKGAAM porque não temos informações de execução desse conjunto de instâncias.

Em relação à tempo computacional, as instâncias MDG-b $n = 500$ e $m = 50$ teve tempo médio de execução de 131 segundos, aproximadamente. Já nas instâncias de maior porte, MDG-b com $n = 2000, m = 200$ e MDG-c com $n = 3000, m = 300, 400, 500, 600$, apresentam média de tempo de aproximadamente $7200s$, tempo máximo determinado como critério de parada.

6. Conclusões

Neste trabalho propomos um algoritmo híbrido de BRKGA e busca local que se mostrou promissor na obtenção de soluções de qualidade para o PDM. Na comparação com outros algoritmos da mesma natureza, o algoritmo aqui proposto teve em média soluções de melhor qualidade.

Nos próximos passos desse estudo deseja-se utilizar outros conjuntos de instâncias disponíveis na literatura com um número maior de variáveis. Além disso, pretende-se estudar a integração da solução obtida na fase busca local com a metaheurística BRKGA.

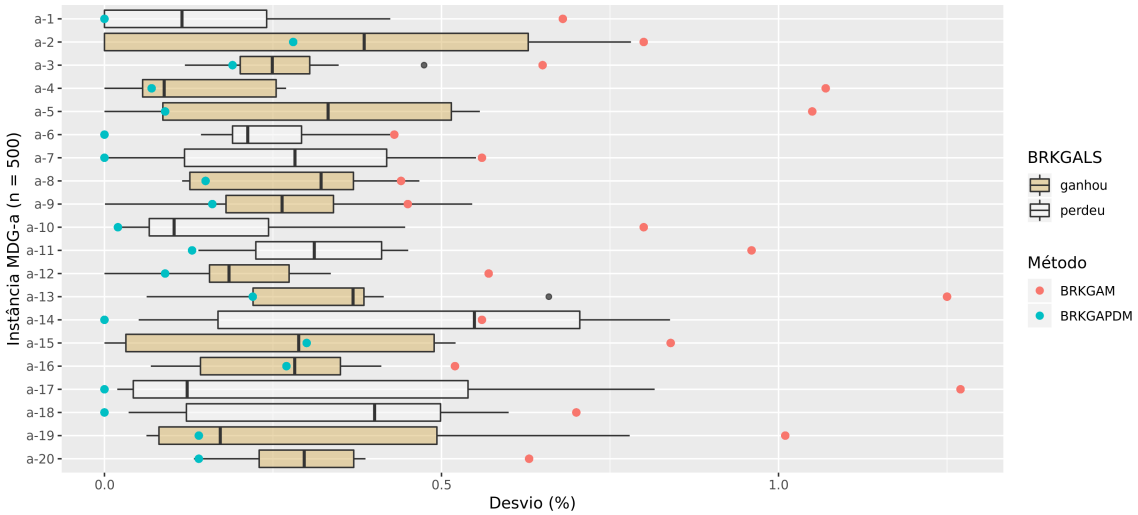


Figura 2: Boxplot comparando os algoritmos propostos com os da literatura para as instâncias MDG-a $n = 500, m = 50$

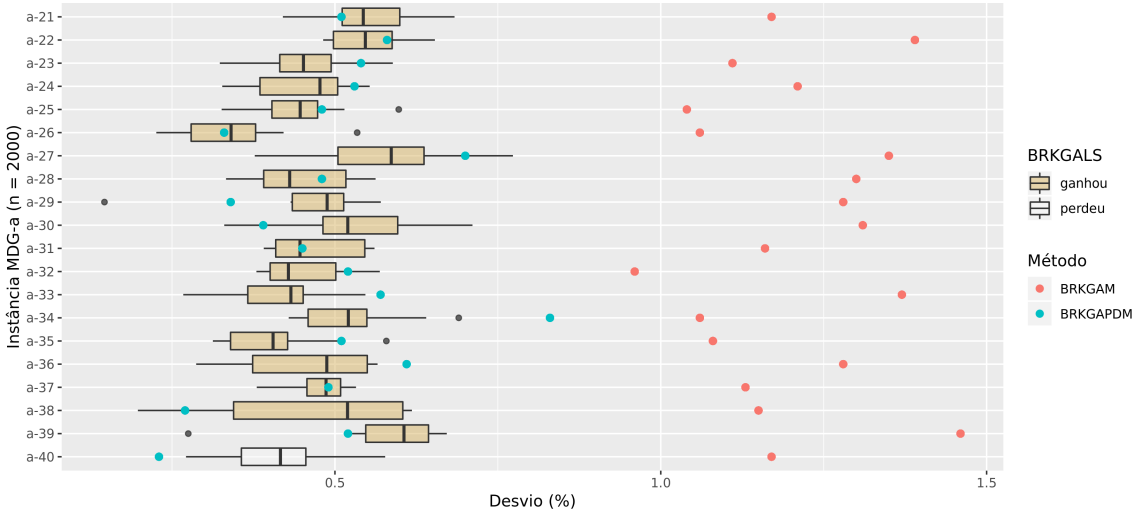


Figura 3: Boxplot comparando os algoritmos propostos com os da literatura para as instâncias MDG-a $n = 2000, m = 200$

Tabela 3: Média das diferenças percentuais em % para as instâncias do tipo MDG-b.

Método	**n**	**m**	**Média**
BRKGALS	500	50	**0,04**
BRKGAPDM	500	50	0,05
BRKGAM	500	50	0,55
BRKGALS	2000	200	**0,32**
BRKGAPDM	2000	200	0,51
BRKGAM	2000	200	1,14

Tabela 4: Média das diferenças percentuais em % para as instâncias do tipo MDG-c.

Método	**n**	**m**	**Média**
BRKGALS	3000	300	**0,31**
BRKGAPDM	3000	300	0,43
BRKGALS	3000	400	**0,28**
BRKGAPDM	3000	400	0,44
BRKGALS	3000	500	**0,20**
BRKGAPDM	3000	500	0,31
BRKGALS	3000	600	**0,20**
BRKGAPDM	3000	600	0,31

Referências

Agrafiotis, D. K. (1997). Stochastic algorithms for maximizing molecular diversity. *Journal Chem. Inf. Comput. Sci.*, 37:841–851.

Andrade, P. M. F. (2003). Um GRASP para o problema da maximização da diversidade. Master's thesis, Universidade Federal Fluminense.

Aringhieri, R. e Cordone, R. (2011). Comparing local search metaheuristics for the maximum diversity problem. *Journal of the Operational Research Society*, 62(2):266–280. ISSN 1476-9360. URL https://doi.org/10.1057/jors.2010.104.

Aringhieri, R., Cordone, R., e Melzani, Y. (2008). Tabu search versus GRASP for the maximum diversity problem. *4OR*, 6(1):45–60. ISSN 1614-2411. URL https://doi.org/10.1007/s10288-007-0033-9.

Bean, J. C. (1994). Genetic algorithms and random keys for sequencing and optimization. *ORSA journal on computing*, 6(2):154–160.

Brimberg, J., Mladenović, N., Urošević, D., e Ngai, E. (2009). Variable neighborhood search for the heaviest k-subgraph. *Comput. Oper. Res.*, 36(11):2885–2891. ISSN 0305-0548. URL http://dx.doi.org/10.1016/j.cor.2008.12.020.

Brito, J., Fadel, A., e Semaan, G. (2018). Algoritmo heurístico aplicado ao problema da diversidade máxima. In *Anais do L SBPO*, Rio de Janeiro. GALOÁ.

Dhir, K., Glover, F., e Kuo, C.-C. (1994). Optimizing diversity for engineering management. In *Proceedings of the IEEE International Engineering Management Conference*.

Duarte, A. e Martí, R. (2007). Tabu search and GRASP for the maximum diversity problem. *European Journal of Operational Research*, 178(1):71 – 84. ISSN 0377-2217. URL http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0377221706000634.

Fogel, D. B. (1994). An introduction to simulated evolutionary optimization. *IEEE Trans. on Neural Networks: Special Issue on Evolutionary Computation*, 5:3–14.

Ghosh, J. B. (1996). Computational aspects of maximum diversity problem. *Operations Research Letters*, 19:175–181.

Glover, F., Hersh, G., e McMillan, C. (1977). Selecting subsets of maximum diversity. Technical report, University of Colorado at Boulder.

Gonçalves, J. F. e Resende, M. G. C. (2011). Biased random-key genetic algorithms forăcombinatorial optimization. *Journal of Heuristics*, 17(5):487–525. ISSN 1572-9397. URL https://doi.org/10.1007/s10732-010-9143-1.

Kochenberger, G. e Glover, F. (1999). Diversity data mining. Technical report, The University of Mississipi.

Kuo, C.-C., Glover, F., e Dhir, K. (1993). Analysing and modeling the maximum diversity problem by zero-one programming. *Decision Science*, 24:1171–1185.

Martí, R., Gallego, M., Duarte, A., e Pardo, E. G. (2013). Heuristics and metaheuristics for the maximum diversity problem. *Journal of Heuristics*, 19(4):591–615. ISSN 1572-9397. URL https://doi.org/10.1007/s10732-011-9172-4.

https://proceedings.science/p/106909?lang=pt-br

Maser, C. (1999). *Ecological Diversity in Sustainable Development: The Vital and Forgotten Dimension*. Saint Lucie Press.

Moro, M. A. (2017). Meta-heurísticas GRASP e BRKGA aplicadas ao problema da diversidade máxima. Master's thesis, Universidade Estadual de Campinas. URL http://repositorio.unicamp.br/jspui/handle/REPOSIP/325550.

Palubeckis, G. (2007). Iterated tabu search for the maximum diversity problem. *Applied Mathematics and Computation*, 189(1):371 – 383. ISSN 0096-3003. URL http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0096300306016122.

Pearce, D. (1987). Economics and genetic diversity. *Futures*, 19:710–712.

Reinhold, V. N. (1991). *Handbook of Genetic Algorithms*. Lawrence Davis.

Silva, G. C., Andrade, M. R., Ochi, L. S., Martins, S. L., e Plastino, A. (2007). New heuristics for the maximum diversity problem. *Journal of Heuristics*, 13(4):315–336. ISSN 1381-1231. URL http://dx.doi.org/10.1007/s10732-007-9010-x.

Silva, G. C., Ochi, L. S., e Martins, S. L. (2004). Experimental comparison of greedy randomized adaptive search procedures for the maximum diversity problem. In *Experimental and Efficient Algorithms: Third International Workshop*, volume 3059 of *Lecture Notes in Computer Science*, p. 498 – 512. Springer-Verlag.

Toso, R. e Resende, M. (2012). brkgaAPI: A C++ application programming interface for biased random-key genetic algorithms. Technical report, AT&T Labs Research, Florham Park, New Jersey.

Unkel, W. C. (1985). Natural diversity and national forest. *Natural Areas Journal*, 5:8–13.

Wang, J., Zhou, Y., Yin, J., e Zhang, Y. (2009). Competitive hopfield network combined with estimation of distribution for maximum diversity problems. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics, Part B (Cybernetics)*, 39(4):1048–1066. ISSN 1083-4419.

Wang, Y., Hao, J.-K., Glover, F., e Lü, Z. (2014). A tabu search based memetic algorithm for the maximum diversity problem. *Engineering Applications of Artificial Intelligence*, 27:103 – 114. ISSN 0952-1976. URL http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0952197613001796.

Weitz, R. e Lakshminarayanan, S. (1998). An empirical comparison of heuristic methods for creating maximally diverse group. *Journal of the operational Research Society*, 49:635–646.

Zhou, S. e Giannakis, G. B. (2001). Space-time coded transmissions with maximum diversity gains over frequency-selective multipath fading channels. In *GLOBECOM 2001 - IEEE Global Telecommunications Conference*.

https://proceedings.science/p/106909?lang=pt-br