APOIO À DECISÃO ASSOCIANDO A COMPOSIÇÃO PROBABILÍSTICA DE PREFERÊNCIAS AO MONTE CARLO AHP (CPP-MCAHP)

Luiz Octávio Gavião
Escola Superior de Guerra (ESG)
Fortaleza de São João - Av. João Luiz Alves, s/nº - Urca – Rio de Janeiro-RJ - CEP: 22291-090
E-mail: luiz.gaviao67@gmail.com

Annibal Parracho Sant'Anna
Universidade Federal Fluminense (UFF)
Rua Passo da Pátria, 156, Bloco D, São Domingos, Niterói-RJ, CEP: 24.220-240
E-mail: annibal.parracho@gmail.com

Gilson Brito Alves Lima
Universidade Federal Fluminense (UFF)
Rua Passo da Pátria, 156, Bloco D, São Domingos, Niterói-RJ, CEP: 24.220-240
E-mail: glima@id.uff.br

Pauli Adriano de Almada Garcia
Universidade Federal Fluminense (UFF)
Rua Des. Ellis Hermydio Figueira, 783 - Aterrado, Volta Redonda - RJ, CEP: 27213-145
E-mail: pauliadriano@gmail.com

Sergio Kostin
Escola Superior de Guerra (ESG)
Fortaleza de São João - Av. João Luiz Alves, s/nº - Urca – Rio de Janeiro-RJ - CEP: 22291-090
E-mail: sfkostin@gmail.com

RESUMO

O Processo de Análise Hierárquica (AHP) com múltiplos especialistas, em geral, agrega as avaliações paritárias com médias geométricas. Dependendo da assimetria do conjunto de dados, a agregação por média pode provocar distorções. Além disso, existem incertezas epistêmicas embutidas nesse processo tradicional, associadas ao julgamento humano, em decorrência de limitações cognitivas, variações de conhecimento, experiência e parcialidade das avaliações. Para lidar com essas dificuldades, a simulação de Monte Carlo tem sido associada ao AHP, produzindo os modelos MCAHP, com resultados estocásticos. Essa forma de resultado coincide e se adequa à primeira etapa da Composição Probabilística de Preferências (CPP), um método de apoio à decisão probabilístico. A associação da CPP permite ampliar a interpretação dos resultados e estender o MCAHP para diferentes pontos de vista do tomador de decisão. Sendo assim, o presente trabalho desenvolve novo modelo, CPP-MCAHP, comparado ao AHP com médias geométricas e ao AHP estocástico com resultados satisfatórios.

PALAVRAS CHAVE. CPP-MCAHP, Monte Carlo, AHP Estocástico.
Tópicos: MP (Modelos Probabilísticos)

ABSTRACT

The Analytic Hierarchy Process (AHP) with multiple experts usually aggregates the pairwise evaluations with geometric means. Depending on the data set asymmetry, aggregation by average can cause distortions. In addition, there is an uncertainty associated with human judgment, due to cognitive limitations, variations in knowledge and experience, and bias, which imprecise the process. To deal with these difficulties, Monte Carlo simulation has been associated with AHP, creating MCAHP models with stochastic results. This form of result fits the first step of the Composition of Probabilistic Preferences (CPP), a probabilistic multicriteria decision aid method. The association of CPP improves the interpretation of results and extend the MCAHP to different points of view of decision making. A new model is developed here, the CPP-MCAHP, which is compared to AHP with geometric means and stochastic AHP with satisfactory results.

KEYWORDS. CPP-MCAHP. Monte Carlo. Stochastic AHP.
Paper topics: MP (Probabilistic Models)

https://proceedings.science/p/106848?lang=pt-br

1. Introdução

O Processo de Análise Hierárquica (AHP) é um método de apoio à decisão multicritério (MCDA), sendo amplamente utilizado como um dos principais métodos na resolução dos mais diversos tipos de problemas complexos [Saaty 1980]. Para a definição da ordem de prioridade das alternativas capazes de solucionar o problema, o método AHP requer a execução das seguintes etapas: (1) definir o objetivo, os critérios de avaliação, eventuais subcritérios e possíveis alternativas, estabelecendo uma estrutura hierárquica ao problema; (2) comparar os elementos de decisão de forma paritária em cada nível da estrutura hierárquica, em relação ao nível superior, com base em uma escala específica; (3) calcular os pesos relativos dos elementos de decisão nos diversos níveis hierárquicos e, por fim, (4) ordenar as alternativas de decisão a partir da agregação dos pesos dos elementos de decisão.

A literatura registra algumas limitações do AHP. [Yaraghi et al. 2015] destaca uma limitação em especial, no que se refere à incerteza associada ao julgamento humano, em decorrência de limitações cognitivas dos especialistas, efetivo conhecimento e experiência dos especialistas, parcialidade das avaliações, entre outros aspectos que influenciam os resultados de cada julgamento [Kahneman 2003]. O método AHP assume que os tomadores de decisão estimam, de forma pontual e precisa, suas preferências por critérios, subcritérios e alternativas. Entretanto, essas preferências se baseiam em uma escala semântica de nove pontos, o que embute incerteza ao processo de avaliação [Durbach et al. 2014]. Embora o método AHP original não aprofunde o problema da incerteza ou imprecisão dos dados de entrada além das avaliações paritárias dessa escala, diversas extensões ao método foram propostas para resolver este problema, usando por exemplo a teoria dos conjuntos *fuzzy* [Boender et al. 1989],[Buckley 1985], a teoria da razão aproximada [Salo e Hämäläinen 1995] e técnicas estocásticas [Hauser e Tadikamalla 1996],[Saaty e Vargas 1987].

Outra limitação do AHP se refere à possibilidade de inconsistência das avaliações. Em problemas de decisão na vida real, as matrizes de comparação paritária das variáveis (i.e. critérios, subcritérios e alternativas) raramente são consistentes [Bozóki e Rapcsák 2008]. Para [Forman 1993], essa inconsistência é natural, tendo em vista a falta do perfeito conhecimento do tema por parte dos especialistas. Além disso, aquele autor alerta que a inconsistência de ocorrências no dia-a-dia é um aspecto rotineiro, exemplificando o ambiente esportivo, em que não raro um time A vence um time B e este time B vence um time C, porém o time A perde para o time C. As comparações paritárias com esse tipo de relação entre os times A, B e C contribuem para que a razão de consistência não atenda ao padrão inferior a 10%, que corresponde à medida de consistência proposta por [Saaty 1980]. Posteriormente, o próprio [Saaty 1990] também reconheceu que uma variedade de circunstâncias, sempre dinâmicas, influenciam as preferências humanas, interferindo na consistência das avaliações.

Com base nessas limitações, diversas aplicações com simulações de Monte Carlo foram associadas ao AHP, um modelo doravante denominado MCAHP neste artigo, embora a literatura também registre o processo de "AHP Estocástico". Em geral, as simulações são efetuadas com base na transformação das avaliações paritárias, de valores exatos para variáveis aleatórias. A primeira pesquisa nesse sentido foi elaborada por [Vargas 1982], empregando distribuições Gamma e Dirichlet. Em [Momani e Ahmed 2011] foram utilizadas distribuições triangulares. Em problemas envolvendo múltiplos especialistas, a maioria das aplicações envolve a agregação das avaliações paritárias por média geométrica [Aczél e Saaty 1983], [Saaty e Vargas 2012]. Quando produzem resultados probabilísticos, as abordagens com o MCAHP também utilizam, em geral, médias e desvios-padrão para comparar as distribuições e definir a ordem das alternativas [Momani e Ahmed 2011].

Entretanto, a média é uma medida de tendência central em estatística, com a finalidade de resumir um conjunto de dados a um valor, que representa o centro de sua distribuição. Dependendo da assimetria do conjunto de dados, a agregação por média pode provocar distorções aos resultados [Heathcote et al. 1991]. Por exemplo, se nove entre dez servidores recebem uma unidade monetária por pagamento e um servidor recebe 991 unidades, a média aritmética indica 100 unidades por pagamento. A média geométrica indica 1,99 unidades por pagamento. Embora

https://proceedings.science/p/106848?lang=pt-br

mais realista que a média aritmética, ao menos para 90% da amostra, a média geométrica representa um valor próximo ao dobro do pagamento para nove servidores e ainda um valor bem inferior para o último pagamento.

Este artigo propõe dois desenvolvimentos estocásticos para o AHP. Inicialmente, uma variante do modelo MCAHP, que difere das etapas de cálculo de [Rosenbloom 1997], ao não agregar as avaliações paritárias de múltiplos especialistas em uma distribuição de probabilidade. Aqui é proposto um ajuste de cada avaliação, de cada especialista, a uma distribuição de probabilidade. Nesse caso, cada avaliação paritária dos especialistas é associada a um valor mais provável, entre os parâmetros mínimo (i.e. 1/9) e máximo (i.e. 9) da escala de [Saaty 1980].

A distribuição Beta PERT, usualmente utilizada para a modelagem de problemas complexos, sob cenário de incerteza, simplifica a ajustagem desses parâmetros disponíveis (i.e. mínimo, mais provável e máximo) [Vose 2008]. Essas distribuições permitem simular uma quantidade significativa de matrizes para cada especialista, emulando múltiplas avaliações, que seriam inexequíveis de coletar na realidade, em função do tempo disponível e do desgaste do especialista para preencher dez ou cem mil formulários, por exemplo. A ampliação da quantidade de matrizes permite selecionar as avaliações consistentes do especialista, ao manter somente as que apresentam razão de consistência inferior a 10%.

O procedimento de simulação também amplia a quantidade dos resultados das avaliações dos especialistas. Dessa forma, os resultados finais do AHP também podem ser representados por distribuições de probabilidade. Nesse caso, optou-se por uma distribuição empírica, em função da quantidade de resultados disponíveis para a ajustagem estatística dos dados. A representação dos resultados por distribuição empírica decorre de suas características; primeiro, por seu ajuste à representação gráfica dos dados e não a parâmetros; segundo, por ser a distribuição de referência para avaliar a eficiência de diversas técnicas estatísticas de ajuste de dados [D'Agostino 2017],[Delignette-Muller e Dutang 2015].

Ao produzir distribuições de probabilidade para os resultados do AHP, o MCAHP se torna atraente à Composição Probabilística de Preferências (CPP). O CPP é um modelo MCDA desenvolvido por [Sant'Anna e Sant'Anna 2001] para o apoio à decisão com abordagem probabilística. A primeira etapa do CPP é justamente a transformação de valores exatos em variáveis aleatórias, assumindo os mesmos argumentos sobre a incerteza associada ao julgamento humano, utilizado no MCAHP. Essa etapa coincide com o resultado probabilístico do MCAHP, permitindo que as avaliações recebam o adequado tratamento por um MCDA específico para a abordagem com dados probabilísticos.

A associação do CPP ao MCAHP é o segundo modelo proposto neste artigo. O CPP-MCAHP enriquece e robustece o emprego do AHP com múltiplos especialistas, por tornar mais realista o julgamento humano, ao explorar as distribuições de probabilidade em sua plenitude, sem a necessidade de agregação em medidas de tendência central. O CPP avalia conjuntamente as alternativas, oferecendo diversas formas de composição dos resultados, e com ampla gama de aplicações em problemas de apoio à decisão [Sant'Anna 2015].

Este artigo foi dividido em cinco seções. Após a introdução, a Seção 2 apresenta os modelos AHP, MCAHP e CPP-MCAHP. A Seção 3 analisa a aplicação desses três modelos em um problema de apoio à decisão, com a estrutura hierárquica do AHP e com avaliações de múltiplos especialistas. A Seção 4, por fim, conclui o artigo. Todos os cálculos foram efetuados em linguagem R [R-Core-Team 2018].

2. Modelos AHP, MCAHP e CPP

Neste artigo, três modelos foram aplicados a um problema de apoio à decisão com estrutura hierárquica, com avaliações paritárias geradas por cinco especialistas. Inicialmente foi utilizado o método AHP, a partir da agregação dos dados dos especialistas por média geométrica. No segundo modelo, MCAHP, foram simulados mil valores aleatórios para cada avaliação paritária dos especialistas, com base em uma distribuição Beta PERT, considerando os seguintes parâmetros: valor mínimo igual a 1/9, valor mais provável igual a avaliação original do especialista e valor máximo igual a 9. No terceiro modelo, o CPP é aplicado aos resultados

estocásticos obtidos pelo MCAHP, de forma a avaliar os possíveis resultados para diferentes pontos de vista da tomada de decisão.

2.1 Modelo AHP

O AHP foi desenvolvido por [Saaty 1980], para solução de problemas de apoio à decisão. O modelo requer a definição do objetivo do problema, a escolha de atributos (i.e. critérios e eventuais subcritérios) para orientar o processo de avaliação e alternativas, capazes de atenderem ao objetivo inicial. Essa estrutura hierárquica observa, genericamente, o esquema da Fig. 1, sendo "n1, n2, ... , n7" as notações para quantidades não necessariamente iguais de critérios, subcritérios e alternativas.

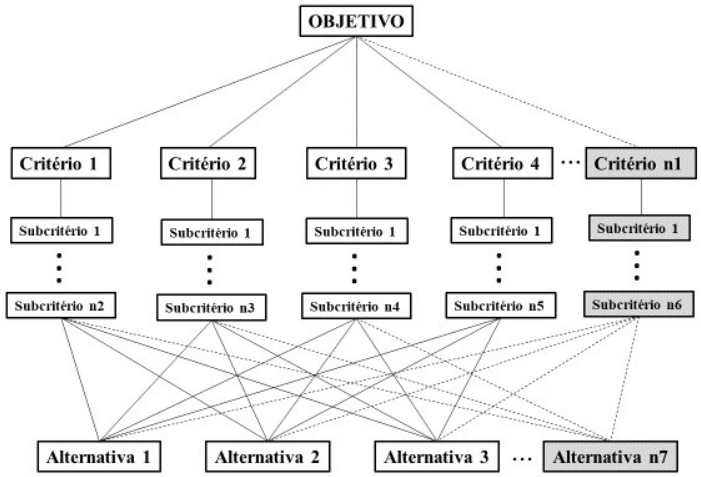

Fig. 1 Estrutura hierárquica de um problema genérico

O AHP requer avaliações para os critérios, eventuais subcritérios e alternativas, efetuadas para um nível acima em sua estrutura. Essas avaliações são paritárias e compõem matrizes com valores da escala proposta por [Saaty 1980], na Fig. 2.

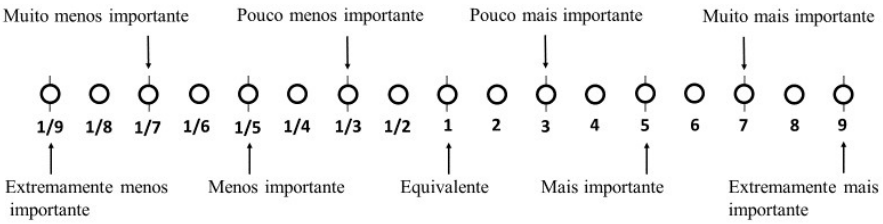

Fig. 2 Escala de Saaty. Fonte: adaptado de [Saaty 1980].

O procedimento de cálculo do AHP explora conceitos de álgebra linear. As matrizes de avaliações paritárias são normalizadas por coluna e, em seguida, as médias dos valores das linhas indicam as prioridades de cada alternativa. A razão de consistência das avaliações também pode ser obtida, a partir da divisão de um índice de consistência, obtido da matriz de avaliações, por um índice aleatório para a quantidade de variáveis. A razão de consistência inferior a 10% indica a consistência das avaliações. O detalhamento desse procedimento de cálculo pode ser verificado em [Saaty 1980].

2.2 Modelo MCAHP

O modelo estocástico do AHP, aqui proposto, é composto por três etapas. Inicialmente é efetuada a simulação de Monte Carlo para cada a_{ij} da matriz de avaliações paritárias do AHP. Este artigo explorou a distribuição Beta PERT, com característica assimétrica, assumindo que a

https://proceedings.science/p/106848?lang=pt-br

avaliação a_{ij} corresponde ao valor modal da distribuição, tendo por limites os extremos valores da escala de Saaty (i.e. mínimo=1/9 e máximo=9), conforme a Fig. 3. A função matemática que define a distribuição Beta PERT está disponível no aplicativo "mc2d", no banco de dados do software R [Pouillot e Delignette-Muller 2010]. O aplicativo "mc2d" exige um parâmetro adicional para essas distribuições, denominado *shape*. Este parâmetro está associado à curtose da distribuição: valores elevados indicam desvios-padrão reduzidos, enquanto os valores próximos a zero ampliam o desvio-padrão da distribuição. Neste artigo, padronizou-se o *shape* igual a 10, para todas as distribuições Beta PERT e uma quantidade *n* de simulações igual a mil.

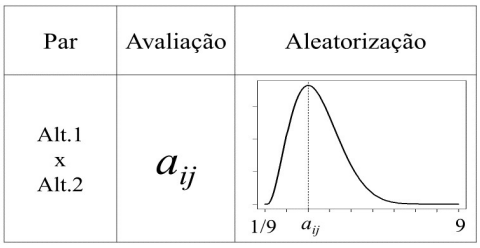

Fig. 3 Aleatorização de uma avaliação paritária

Na 2ª Etapa, efetuaram-se os *n* cálculos do AHP para cada nova matriz de avaliações, gerada para cada um dos K especialistas, totalizando Kn resultados do AHP. Esses resultados definiram diferentes pesos para cada alternativa, para cada especialista. Esses Kn resultados, para o caso de três alternativas, se distribuíram por seis tipos de combinação para as preferências finais das alternativas: Alt.1-Alt.2-Alt.3; Alt.1-Alt.3-Alt.2; Alt.2-Alt.1-Alt.3; Alt.2-Alt.3-Alt.1; Alt.3-Alt.1-Alt.2 e Alt.3-Alt.2-Alt.1. Na última etapa, o volume de resultados de cada sequência, que caracteriza o mais simples procedimento estocástico, define o resultado do MCAHP.

2.3 Modelo CPP-MCAHP

O CPP-MCAHP é calculado em quatro etapas. Inicialmente são efetuadas as duas etapas iniciais do MCAHP, descritas na Seção 2.2. Entretanto, os *n* resultados das alternativas são filtrados, de forma a atender a restrição de CR inferiores a 10%. Isto torna irregular o número de simulações preservadas para cada alternativa. Dessa forma, os resultados são ajustados a distribuições empíricas, com base no aplicativo "EnvStats", disponível na rede do software R [Millard 2013], na 3ª Etapa do modelo. A etapa final corresponde à aplicação do CPP às distribuições empíricas das alternativas, considerando cada especialista como critério diferente do problema. Esta etapa substitui a aleatorização das alternativas, que corresponde à etapa inicial do CPP.

O CPP foi originalmente proposto por [Sant'Anna e Sant'Anna 2001] e ampliado com novos algoritmos e aplicações em [Sant'Anna 2015]. O método se destina à solução de problemas de apoio à decisão de natureza probabilística. Neste artigo, optou-se por associar o MCAHP com o CPP por eixo, por ampliar os pontos de vista da tomada de decisão dos resultados estocásticos do MCAHP. Desde 2001, mais de uma centena de aplicações do CPP às mais diversas áreas da engenharia e gestão foram levantadas na literatura [Gavião e Lima 2017].

Após a etapa inicial de aleatorização das alternativas, são calculadas as probabilidades de cada alternativa ser superior (P.Max) e inferior (P.Min) às demais, conjuntamente, em cada critério, conforme as Equações (1) e (2) [Sant'Anna et al. 2012]. Nesta pesquisa, foram calculadas essas probabilidades para cada especialista *j*. A notação da i-ésima alternativa está indexada por "i" e as demais por "-i". As notações *F, f e D* são, respectivamente, a função distribuição cumulativa (cdf), a função densidade de probabilidade (pdf) e o domínio das variáveis na escala de Saaty, no intervalo (1/9,9).

$$\mathrm{P}.Max_{ij} = \int_{D_{ij}} \left[\prod\nolimits_{j} F_{-ij}(x) \right] f_{ij}(x)\, dx \qquad (1)$$

https://proceedings.science/p/106848?lang=pt-br

$$P.Min_{ij} = \int_{D_{ij}} \left[1 - F_{-ij}(x)\right] f_{ij}(x)\, dx \tag{2}$$

Para a ordenação das alternativas, as probabilidades "$P.Max_{ij}$" e "$P.Min_{ij}$" são compostas em escores de preferência global, para diferentes pontos de vista do decisor. As composições com base nas "$P.Max_{ij}$" são denominadas progressistas, por associar a decisão à maximização de ganhos. Nesse caso, os ganhos estão associados às probabilidades de maximizar as preferências. As composições com base nas "$P.Min_{ij}$" são denominadas conservadoras, por associar a decisão à minimização de perdas, representadas pelas probabilidades de minimizar as preferências. As composições das "$P.Max_{ij}$" e "$P.Min_{ij}$" em todos os critérios são denominadas pessimistas, enquanto as otimistas são satisfeitas com a máxima ou mínima preferência em ao menos um critério. Dessa forma, é possível associar a tomada de decisão a quatro pontos de vista, referentes à interseção desses dois eixos progressista-conservador e otimista-pessimista, conforme a Fig.4.



Fig. 4 Pontos de vista da tomada de decisão. Fonte: [Gavião e Lima 2017].

Para a condição de independência das avaliações dos especialistas, as seguintes equações determinam os resultados das quatro composições PP, PO, CP e CO, cujos maiores valores numéricos determinam a escolha final das alternativas.

Tabela 2 Equações das composições do CPP por eixo

Ponto de vista	Equações
Progressista-Pessimista	$PP_i = \prod P.Max_{ij}$
Progressista-Otimista	$PO_i = 1 - \prod (1 - P.Max_{ij})$
Conservador-Pessimista	$CP_i = \prod (1 - P.Min_{ij})$
Conservador-Otimista	$CO_i = 1 - \prod P.Min_{ij}$

Fonte: [Sant'Anna 2015].

3. Aplicação e Resultados

Um problema genérico de ordenação de três alternativas, estruturado de forma hierárquica com quatro critérios foi utilizado neste artigo para ilustrar e comparar os resultados dos modelos indicados na Seção 2. As avaliações paritárias de cinco especialistas foram geradas aleatoriamente, conforme descreve a Fig. 5. Os valores numéricos estão indicados somente nas matrizes triangulares superiores, considerando que a matriz triangular inferior é composta por avaliações inversas $1/a_{ij}$. Na primeira linha de matrizes, designada por "CRIT", constam as avaliações dos quatro critérios, conforme a escala de Saaty, apresentada na Fig. 2. Um valor

numérico a_{ij} igual a 3, por exemplo, indica que o critério i é pouco mais importante que o critério j. As demais linhas de matrizes (i.e. C1, C2, C3 e C4) apresentam as avaliações das alternativas para cada critério, por especialista.

CRIT

Esp 1	Crit 1	Crit 2	Crit 3	Crit 4
Crit 1	1	1/3	1/6	1/5
Crit 2		1	1/4	1/7
Crit 3			1	1/3
Crit 4				1

Esp 2	Crit 1	Crit 2	Crit 3	Crit 4
Crit 1	1	1/2	3	4
Crit 2		1	5	1/9
Crit 3			1	1/5
Crit 4				1

Esp 3	Crit 1	Crit 2	Crit 3	Crit 4
Crit 1	1	4	3	2
Crit 2		1	1	4
Crit 3			1	1/3
Crit 4				1

Esp 4	Crit 1	Crit 2	Crit 3	Crit 4
Crit 1	1	1	1/2	1/3
Crit 2		1	1/3	1/2
Crit 3			1	3
Crit 4				1

Esp 5	Crit 1	Crit 2	Crit 3	Crit 4
Crit 1	1	5	1	1/2
Crit 2		1	4	3
Crit 3			1	1
Crit 4				1

C1

Esp 1	Alt 1	Alt 2	Alt 3
Alt 1	1	3	1/2
Alt 2		1	1/2
Alt 3			1

Esp 2	Alt 1	Alt 2	Alt 3
Alt 1	1	2	1/5
Alt 2		1	1/3
Alt 3			1

Esp 3	Alt 1	Alt 2	Alt 3
Alt 1	1	1	1/9
Alt 2		1	1/2
Alt 3			1

Esp 4	Alt 1	Alt 2	Alt 3
Alt 1	1	1/6	1
Alt 2		1	1/5
Alt 3			1

Esp 5	Alt 1	Alt 2	Alt 3
Alt 1	1	1/4	1/3
Alt 2		1	5
Alt 3			1

C2

Esp 1	Alt 1	Alt 2	Alt 3
Alt 1	1	2	1
Alt 2		1	1/5
Alt 3			1

Esp 2	Alt 1	Alt 2	Alt 3
Alt 1	1	6	1/2
Alt 2		1	1/3
Alt 3			1

Esp 3	Alt 1	Alt 2	Alt 3
Alt 1	1	1/3	1/7
Alt 2		1	1/3
Alt 3			1

Esp 4	Alt 1	Alt 2	Alt 3
Alt 1	1	1/3	3
Alt 2		1	4
Alt 3			1

Esp 5	Alt 1	Alt 2	Alt 3
Alt 1	1	3	1/2
Alt 2		1	1/4
Alt 3			1

C3

Esp 1	Alt 1	Alt 2	Alt 3
Alt 1	1	3	1/3
Alt 2		1	2
Alt 3			1

Esp 2	Alt 1	Alt 2	Alt 3
Alt 1	1	5	1
Alt 2		1	5
Alt 3			1

Esp 3	Alt 1	Alt 2	Alt 3
Alt 1	1	1/6	5
Alt 2		1	9
Alt 3			1

Esp 4	Alt 1	Alt 2	Alt 3
Alt 1	1	1/4	2
Alt 2		1	1/9
Alt 3			1

Esp 5	Alt 1	Alt 2	Alt 3
Alt 1	1	2	1
Alt 2		1	1/7
Alt 3			1

C4

Esp 1	Alt 1	Alt 2	Alt 3
Alt 1	1	4	1/5
Alt 2		1	7
Alt 3			1

Esp 2	Alt 1	Alt 2	Alt 3
Alt 1	1	2	4
Alt 2		1	3
Alt 3			1

Esp 3	Alt 1	Alt 2	Alt 3
Alt 1	1	1	3
Alt 2		1	2
Alt 3			1

Esp 4	Alt 1	Alt 2	Alt 3
Alt 1	1	2	4
Alt 2		1	7
Alt 3			1

Esp 5	Alt 1	Alt 2	Alt 3
Alt 1	1	6	1/2
Alt 2		1	1/9
Alt 3			1

Fig. 5 Avaliações paritárias dos Especialistas

As médias geométricas das avaliações dos especialistas se encontram na Fig. 6. Com os dados das matrizes consolidadas dos critérios e das alternativas para cada critério, foi aplicado o AHP, conforme descrito na Seção 2.1. Os resultados, sob a forma de pesos, estão apresentados na Fig. 7.

Critérios

	Crit 1	Crit 2	Crit 3	Crit 4
Crit 1	1	1,2722596	0,9440875	0,7677039
Crit 2	0,7860031	1	1,1075663	0,6248304
Crit 3	1,0592238	0,9028805	1	0,5818108
Crit 4	1,3025855	1,6004343	1,7187719	1

Alt - Crit. 1

	Alt 1	Alt 2	Alt 3
Alt 1	1	0,7578583	0,3263828
Alt 2	1,3195079	1	0,6083643
Alt 3	3,0638871	1,6437518	1

Alt - Crit. 2

	Alt 1	Alt 2	Alt 3
Alt 1	1	1,3195079	0,639724
Alt 2	0,7578583	1	0,5609776
Alt 3	1,5631741	1,7826025	1

Alt - Crit. 3

	Alt 1	Alt 2	Alt 3
Alt 1	1	1,0456396	1,2722596
Alt 2	0,9563525	1	1,0739409
Alt 3	0,7860031	0,9311499	1

Alt - Crit. 4

	Alt 1	Alt 2	Alt 3
Alt 1	1	2,4914619	1,3685109
Alt 2	0,4013708	1	2,0082647
Alt 3	0,7307213	0,4979423	1

Fig. 6 Médias geométricas das avaliações dos Especialistas

Os resultados da aplicação do AHP com as médias geométricas das avaliações indicam que a Alternativa 3, com resultado 0,3488138, é preferível em relação à Alternativa 1 e esta à Alternativa 2. Das matrizes consolidadas, somente a das avaliações de alternativas para o Critério 4 indicou uma razão de consistência superior a 10%. Entretanto, para efeito de comparação com as outras metodologias, foram mantidos os dados dessa matriz para os cálculos do AHP.

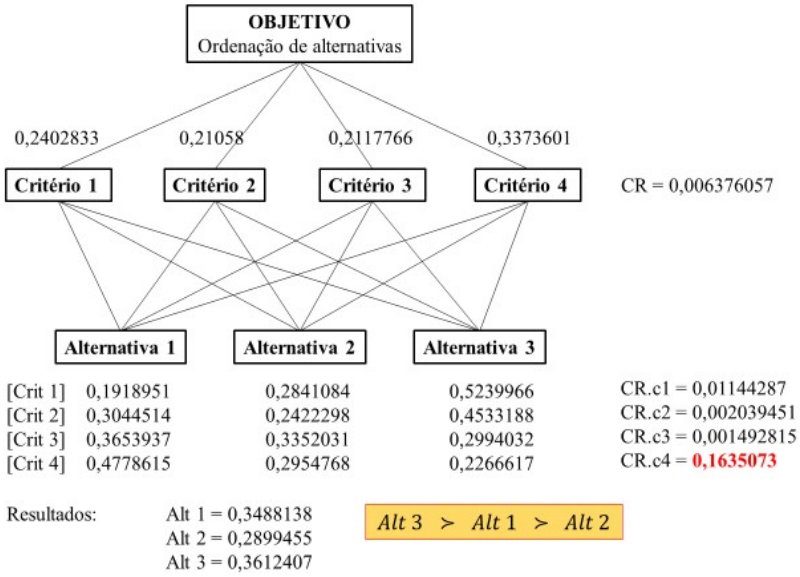

Fig. 7 Resultados do AHP por média geométrica

Em seguida, aplicou-se o MCAHP aos dados iniciais, apresentados na Fig. 5. Foram gerados mil valores aleatórios para cada a_{ij}, por especialista, com base em distribuições Beta PERT. Somente os valores das matrizes triangulares superiores foram gerados, sendo os das matrizes inferiores obtidos por inversão dos a_{ij}. De cada conjunto de matrizes de dados, foi calculado o AHP. Assim, cinco mil resultados do AHP foram plotados em histogramas, conforme descreve a Fig. 8. Cada linha apresenta os pesos das Alternativa, para cada Especialista. Cada ordem de preferência das alternativas, para os cinco mil procedimentos de cálculo, foi registrada na Fig. 9.

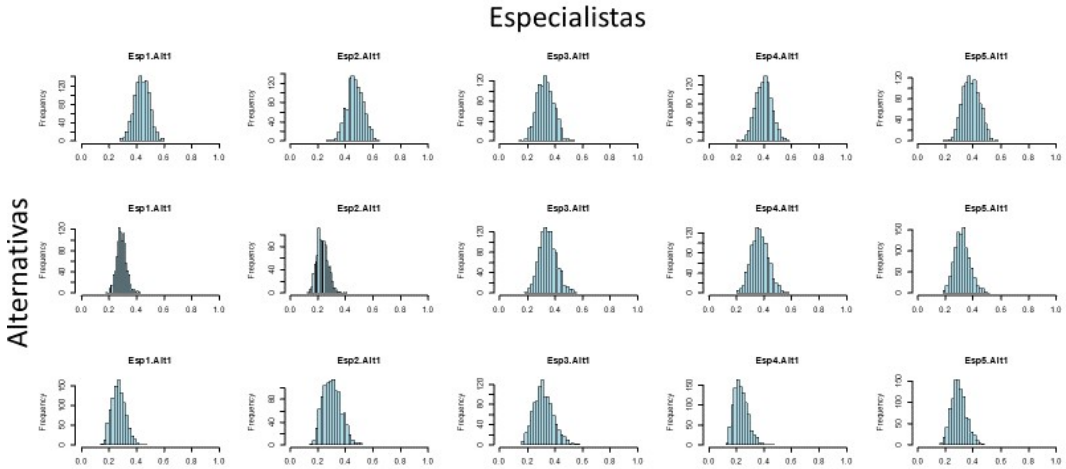

Fig. 8 Histogramas dos resultados por MCAHP

Os histogramas da Fig. 9 indicam a quantidade de combinações de preferências das alternativas, por especialista, conforme os números no topo das barras dos gráficos. Somados os resultados dos especialistas em cada sequência de alternativas, é possível verificar que a ordem A1-A2-A3 apresentou a maior frequência, com 1979 resultados em cinco mil simulações. Em seguida, a ordem de preferência A1-A3-A2 ocorreu 1431 vezes. Em comum, essas duas sequências apresentam a Alternativa 1 com a maior preferência. Somadas as ocorrências das duas

principais ordens de preferência, é possível verificar que responderam por 68,2% dos resultados (i.e. (1979+1431)/5000), o que robustece a escolha pela Alternativa 1.

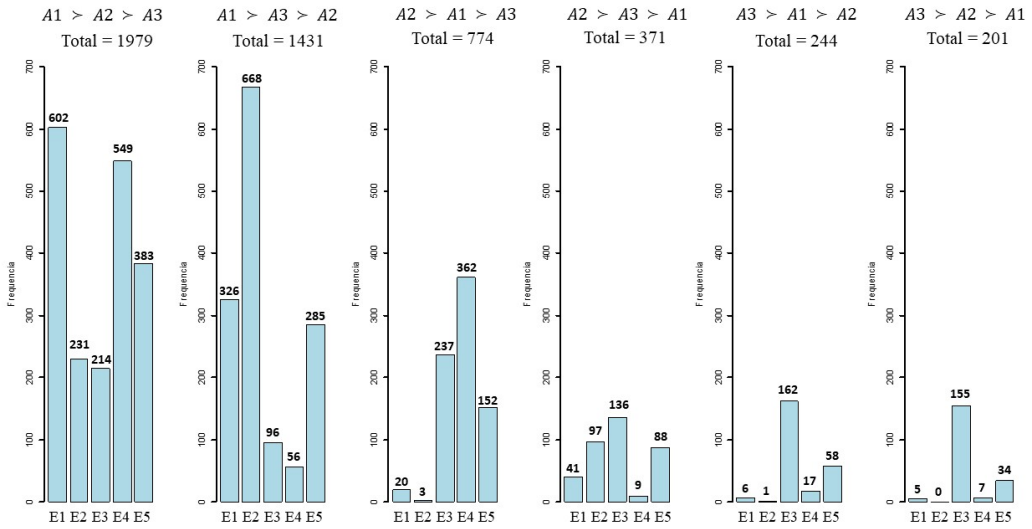

Fig. 9 Análise das combinações de resultados

A consistência das simulações dos especialistas também foi computada, considerando todas as suas avaliações, que incluíram critérios e alternativas por critério. A Fig. 10 apresenta as densidades dos resultados das razões de consistência para cada cálculo do AHP, efetuado a partir das simulações. A marcação vertical em cada gráfico indica a CR igual a 10%. Os percentuais indicados para cada especialista mostram a quantidade de simulações consistentes, indicando que o Especialista 3 foi o mais consistente, pois 53,5% de suas mil simulações produziram CR inferiores a 10%.

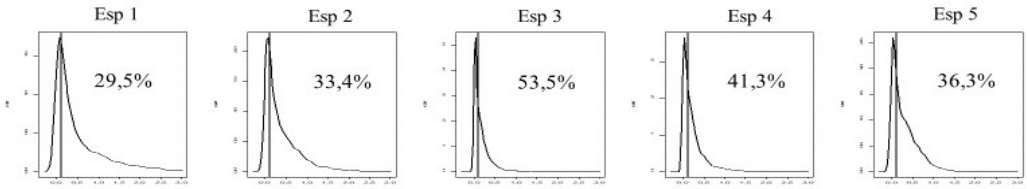

Fig. 10 Consistência dos Especialistas

Por fim, os resultados das simulações do MCAHP para cada alternativa, apresentados na Fig. 8, foram modelados com o CPP. A elevada quantidade de dados iniciais permite uma adequada ajustagem com distribuições empíricas. Com esse tipo de dados, é possível utilizar um método probabilístico, capaz de ordenar as alternativas. A matriz de decisão para a modelagem do CPP foi, então, composta por três alternativas, considerando cada especialista como um diferente critério do problema, conforme a Fig. 8.

A Tabela 3 descreve os resultados do CPP por eixo, com as probabilidades de maximizar (Prob Max) e minimizar (Prob Min) as preferências por alternativa e os rankings para cada ponto de vista de tomada de decisão. Assim, as avaliações do Especialista 1, por exemplo, indicam que a Alternativa 1 apresenta a maior probabilidade de apresentar avaliações superiores às demais e, consequentemente, a menor probabilidade de receber avaliações inferiores. Essas probabilidades são quantificadas e compostas para os diferentes pontos de vista PP, PO, CP e CO. Os quatro resultados do CPP coincidem com a sequência de preferências A1-A2-A3, identificada previamente com as simulações de MCAHP.

Tabela 3 Resultados do CPP-MCAHP

Prob Max	Esp 1	Esp 2	Esp 3	Esp 4	Esp 5
Alt 1	0,9758	0,9651	0,2925	0,6114	0,7344
Alt 2	0,0122	0,0004	0,4826	0,3852	0,1778
Alt 3	0,0120	0,0351	0,2319	0,0045	0,0912

Prob Min	Esp 1	Esp 2	Esp 3	Esp 4	Esp 5
Alt 1	0,0028	0,0003	0,3468	0,0147	0,0620
Alt 2	0,3496	0,7987	0,1914	0,0371	0,3531
Alt 3	0,6478	0,2044	0,4682	0,9503	0,5893

CPP Eixos	PP	Rank	PO	Rank	CP	Rank	CO	Rank
Alt 1	1,24E-01	1	1,00E+00	1	6,02E-01	1	1,00E+00	1
Alt 2	1,76E-07	2	7,42E-01	2	6,59E-02	2	9,99E-01	2
Alt 3	4,04E-08	3	3,38E-01	3	3,04E-03	3	9,65E-01	3

A comparação do AHP com os modelos MCAHP e CPP-MCAHP trouxe maior realismo à solução do problema. O uso de médias geométricas para agregar as múltiplas avaliações dos especialistas indicou um resultado diferente das abordagens estocástica e probabilística. Ao simular valores aleatórios com base nas distribuições Beta PERT, verificou-se que os modelos MCAHP lidam melhor com a imprecisão/incerteza do julgamento humano nas avaliações paritárias. A ordem de preferência A3-A1-A2 obteve 244 ocorrências de cinco mil simulações do MCAHP, o que representa 4,88%. A sequência A1-A2-A3 foi verificada em 1979 vezes, correspondendo a 39,58% dos resultados. Esta sequência também foi confirmada pelo CPP. Além disso, as duas sequências com maior preferência probabilística possuem a Alternativa 1 como prioritária, enquanto o modelo AHP a posicionou como segunda opção em caso de escolha.

Os modelos estocásticos também lidam melhor com o problema de inconsistência, ao não exigir novas rodadas com especialistas. Isto pode ser complexo no mundo real, pois exige mais tempo e desgaste de especialistas nem sempre disponíveis para realizar novas avaliações.

A simulação aqui proposta mantém a matriz triangular inferior como inversa à triangular superior, diferentemente do procedimento usual de cálculo das médias geométricas das avaliações paritárias de especialistas, que torna a matriz "irregular" ao AHP (i.e. matriz triangular inferior não é a inversa da triangular superior).

Por fim, o uso do CPP agregou valor ao modelo MCAHP, no que se refere à aplicação de um modelo de apoio à decisão multicritério, vocacionado à escolha e ordenação de alternativas a partir de dados probabilísticos. Isto evita uma parcela de críticas da literatura, que se referem ao AHP como um método mais útil à atribuição de pesos aos critérios, ao invés de aplicá-lo à escolha de alternativas [Pomerol e Barba-Romero 2012].

4. Conclusões

Este artigo trouxe dois modelos estocásticos para uso com o AHP. As principais limitações do AHP original foram levantadas, com a finalidade de endossar as propostas de modelos. O primeiro, denominado MCAHP, utilizou a simulação de Monte Carlo para ampliar a base de dados iniciais, com a finalidade de reduzir a incerteza associada ao julgamento humano. A simulação, dessa forma, evita o uso de uma única matriz de avaliações paritárias para solucionar o problema. As distribuições Beta PERT permitiram tornar um valor mais provável em uma variável aleatória, de forma a simular mil valores. O cálculo do AHP para mil matrizes de cada especialista identificou a ordem de preferência das seis possíveis para as três alternativas.

Em seguida, foi proposto um segundo modelo estocástico ao AHP, associando-o ao CPP. Os resultados do MCAHP, ao invés de "estocados" em volumes, foram aleatorizados por

distribuições empíricas e submetidos a um método MCDA probabilístico. As duas propostas de modelos estocásticos convergiram em resultados, indicando que a sequência A1-A2-A3 foi a preferencial, enquanto o AHP com agregação de avaliações dos especialistas por médias geométricas apresentou a sequência A3-A1-A2 com a preferida. A diferença de robustez dos resultados indica que os modelos estocásticos apresentaram desempenho superior ao modelo determinístico.

Alguns desdobramentos são visualizados nesta pesquisa. A aleatorização dos resultados do MCAHP para cada nível pode também ser utilizada pelo CPP, de forma a comparar os resultados com os modelos aqui propostos. A aplicação de outros modelos MCDA probabilísticos aos resultados do MCAHP também podem trazer outros aspectos à discussão.

Referências

Aczél, J., & Saaty, T. L. (1983). Procedures for synthesizing ratio judgements. *Journal of Mathematical Psychology*, *27*(1), 93–102.

Boender, C. G. E., De Graan, J. G., & Lootsma, F. A. (1989). Multi-criteria decision analysis with fuzzy pairwise comparisons. *Fuzzy Sets and Systems*, *29*(2), 133–143.

Bozóki, S., & Rapcsák, T. (2008). On Saaty's and Koczkodaj's inconsistencies of pairwise comparison matrices. *Journal of Global Optimization*, *42*(2), 157–175.

Buckley, J. J. (1985). Fuzzy hierarchical analysis. *Fuzzy Sets and Systems*, *17*(3), 233–247.

D'Agostino, R. B. (2017). *Goodness-of-fit-techniques*. Routledge.

Delignette-Muller, M. L., & Dutang, C. (2015). fitdistrplus: An R package for fitting distributions. *Journal of Statistical Software*, *64*(4), 1–34.

Durbach, I., Lahdelma, R., & Salminen, P. (2014). The analytic hierarchy process with stochastic judgements. *European Journal of Operational Research*, *238*(2), 552–559.

Forman, E. H. (1993). Facts and fictions about the analytic hierarchy process. *Mathematical and Computer Modelling*, *17*(4–5), 19–26.

Gavião, L. O., & Lima, G. B. A. (2017). *Decision support in athtlete acquisition: an application of the Composition of Probabilistic Preferences to football [in Portuguese]*. Beau Bassin: Novas Edições Acadêmicas.

Hauser, D., & Tadikamalla, P. (1996). The analytic hierarchy process in an uncertain environment: a simulation approach. *European Journal of Operational Research*, *91*(1), 27–37.

Heathcote, A., Popiel, S. J., & Mewhort, D. J. (1991). Analysis of response time distributions: An example using the Stroop task. *Psychological Bulletin*, *109*(2), 340.

Kahneman, D. (2003). A perspective on judgment and choice: mapping bounded rationality. *American Psychologist*, *58*(9), 697.

Millard, S. P. (2013). EnvStats, an R Package for Environmental Statistics. Wiley Online Library.

Momani, A. M., & Ahmed, A. A. (2011). Material handling equipment selection using hybrid Monte Carlo simulation and analytic hierarchy process. *World Academy of Science, Engineering and Technology*, *59*, 953–958.

Pomerol, J.-C., & Barba-Romero, S. (2012). *Multicriterion decision in management: principles and practice*. New York: Springer.

Pouillot, R., & Delignette-Muller, M. L. (2010). Evaluating variability and uncertainty separately

https://proceedings.science/p/106848?lang=pt-br

in microbial quantitative risk assessment using two R packages. *International Journal of Food Microbiology*, *142*(3), 330–340.

R-Core-Team. (2018). R: A language and environment for statistical computing. *Http://Www. R-Project. Org*. Vienna, Austria.

Rosenbloom, E. S. (1997). A probabilistic interpretation of the final rankings in AHP. *European Journal of Operational Research*, *96*(2), 371–378.

Saaty, T. L. (1980). *The Analytic Hierarchy Process*. New York: McGraw-Hill.

Saaty, T. L. (1990). *Decision making for leaders: the analytic hierarchy process for decisions in a complex world*. RWS publications.

Saaty, T. L., & Vargas, L. G. (1987). Uncertainty and rank order in the analytic hierarchy process. *European Journal of Operational Research*, *32*(1), 107–117.

Saaty, T. L., & Vargas, L. G. (2012). *Models, methods, concepts & applications of the analytic hierarchy process* (Vol. 175). Springer Science & Business Media.

Salo, A. A., & Hämäläinen, R. P. (1995). Preference programming through approximate ratio comparisons. *European Journal of Operational Research*, *82*(3), 458–475.

Sant'Anna, A. P. (2015). *Probabilistic Composition of Preferences, Theory and Applications*. New York: Springer.

Sant'Anna, A. P., Gomes, L. F. A. M., Costa, F. F. da, Rangel, L. A. D., Faria, M. J. da S., Ferreira, R. G., … Senna, V. de. (2012). Análise multicritério baseada em probabilidades de preferência. In V. F. de Oliveira, V. Cavenaghi, & F. S. Másculo (Eds.), *Tópicos emergentes e desafios metodológicos em Engenharia de Produção: casos, experiências e proposições - Volume V* (p. 258). Rio de Janeiro: ABEPRO.

Sant'Anna, A. P., & Sant'Anna, L. A. F. P. (2001). Randomization as a stage in criteria combining. In *International Conference on Industrial Engineering and Operations Management - VII ICIEOM* (pp. 248–256). Salvador.

Vargas, L. G. (1982). Reciprocal matrices with random coefficients. *Mathematical Modelling*, *3*(1), 69–81.

Vose, D. (2008). *Risk analysis: a quantitative guide*. New York: John Wiley & Sons.

Yaraghi, N., Tabesh, P., Guan, P., & Zhuang, J. (2015). Comparison of AHP and Monte Carlo AHP under different levels of uncertainty. *IEEE Transactions on Engineering Management*, *62*(1), 122–132.

https://proceedings.science/p/106848?lang=pt-br