LI Simpósio Brasileiro de Pesquisa Operacional
Limeira–SP, 02 a 06 de setembro de 2019

Otimização Multiobjetivo de Portfólios de Investimento Utilizando Algoritmos Evolutivos

Alexandre Heiden
Universidade do Estado de Santa Catarina (UDESC)
Joinville - SC
alexandreheiden@gmail.com

Felipe Marchi Ramos
Universidade do Estado de Santa Catarina (UDESC)
Joinville - SC
felipe.r.marchi@gmail.com

Omir Correa Alves Junior
Universidade do Estado de Santa Catarina (UDESC)
Joinville - SC
omir.alves@udesc.br

RESUMO

No mercado financeiro, ativos de diferentes tipos são comercializados, sendo um deles as ações. A posse de um conjunto de ações é chamado de portfólio de investimento e a seleção e manutenção desse portfólio é um dos principais objetivos de um investidor. Para auxiliar esse processo, modelos matemáticos existem com diferente objetivos e restrições, permitindo ao investidor escolher aquele que melhor adequa-se ao seu perfil. No contexto deste trabalho, será considerado o modelo de portfólio utilizando o modelo de valor em risco condicional (CVaR) com adição da restrição de cardinalidade. Para resolver esse modelo, são propostos três algoritmos: o NSGA-II, com parâmetros diferentes dos encontrados na literatura, o BRKGA e a combinação do BRKGA com NSGA-II. Experimentos foram realizados e a análise estatística dos resultados revela que o algoritmo híbrido BRKNSGA mostra-se mais adequado para resolução do problema.

PALAVRAS CHAVE. Otimização multiobjetivo de portfólios, BRKGA, NSGA-II.
Tópicos: Gestão Financeira, Otimização Combinatória, Metaheurísticas.

ABSTRACT

In the financial market, assets of different types are traded, one of them being shares. Ownership of a set of stocks is called an investment portfolio and the selection and maintenance of that portfolio is one of the main objectives of an investor. To assist this process, mathematical models exist with different objectives and restrictions, allowing the investor to choose the one that best suits their profile. In the context of this work, the portfolio model will be considered using the conditional value-at-risk (CVaR) model with addition of the cardinality constraint. To solve this model, three algorithms are proposed: NSGA-II, with parameters different from those found in the literature, BRKGA and the combination of BRKGA and NSGA-II. Experiments were performed and the statistical analysis of the results reveals that the hybrid algorithm BRKNSGA is the most adequate to solve the problem.

KEYWORDS. Multi-objective portfolio optimization, BRKGA, NSGA-II.
Paper topics: Financial Management, Combinatorial Optimization, Metaheuristics.

https://proceedings.science/p/106680?lang=pt-br

1. Introdução

O mercado financeiro é um ambiente em que são comercializados ativos, que são divididos em monetários (moeda e câmbio), títulos públicos e privados, *commodities* e ações. Ações são títulos que correspondem a cotas de propriedade de uma empresa, possibilitando ao acionista direito proporcional sobre ativos e participação nos lucros, de acordo com o número de ações adquiridas. A posse de um conjunto de ações de uma ou mais empresas, constitui o que é chamado de portfólio (ou carteira) de investimento.

No mercado de capitais o valor da ação está suscetível a fatores sociais, econômicos e políticos, de tal forma que seu valor torna-se volátil, podendo oscilar em um curto período de tempo. Esta dinamicidade caracteriza o alto risco do investimento, sendo portanto, o fator de preocupação dos investidores. Baseado neste aspecto vários modelos matemáticos de otimização de portfólios de investimento foram propostos para minimizar o fator risco e maximizar o fator retorno.

Dentre as estratégias para resolução do problema de otimização de portfólios de investimento, [Barroso et al., 2017] utilizou as metaheurísticas Evolução Diferencial (DEMO) e *Non-Dominated Sorting Genetic Algorithm* (NSGA-II), para otimizar portfólios com ativos pertencentes à BOVESPA, obtendo carteiras que geravam maior retorno e menor risco comparadas ao índice Bovespa, principalmente para cardinalidades maiores.

[Ferreira et al., 2017] propuseram um modelo com rebalanceamento e compararam três metaheurísticas nos experimentos: DEMO, NSGA-II e *Strenght Pareto Evolutionary Algorithm* (SPEA2) e concluíram que o desempenho do NSGA-II foi superior aos demais. [Anagnostopoulos e Mamanis, 2011] compararam mais dois algoritmos: *Niched Pareto Genetic Algorithm* 2 (NPGA2) e *Pareto Envelope-based Selection Algorithm* (PESA), para resolver o modelo com risco média-variância e restrição de cardinalidade. Os experimentos mostraram predominância dos algoritmos SPEA2 e NSGA-II para instâncias de até 2196 ativos.

Neste estudo utilizar-se-á os algoritmos: NSGA-II com os operadores mais populares conforme a análise de [Liagkouras e Metaxiotis, 2015], uma releitura do NSGA-II, BRKGA e BRKGA combinado com NSGA-II, com intuito de otimizar um modelo multiobjetivo com minimização de risco e maximização de retorno, analisar os resultados experimentais verificando aspectos como diversidade, espaçamento e cobertura do espaço de busca, objetivando constatar qual algoritmo é o mais adequado para otimização de portfólios de investimento.

O trabalho está organizado da seguinte maneira: a problemática é explanada na Seção 2. Os algoritmos propostos são discutidos na Seção 3. Na Seção 4 as medidas de desempenho são ilustradas, assim como os dados dos experimentos são analisados. Os resultados são sumarizados na Seção 5, que também apresenta projeções para trabalhos futuros.

2. Problemática

[Markowitz, 1952] formulou o primeiro modelo matemático para otimização de portfólios de investimento. O modelo estima o risco utilizando o valor da variação da distribuição dos retornos do ativo (variância) e o retorno usando o valor esperado do ativo. Esse modelo revolucionou a área de otimização de portfólios de investimento mostrando que a diversificação do portfólio é vital para balancear o razão entre risco e retorno esperado. Contudo, a utilização da variância é criticada por pesquisadores da área por levar em consideração tanto os valores abaixo quanto os acima da média [Ferreira et al., 2017].

Em contrapartida, [Rockafellar e Uryasev, 2002] propuseram o modelo de valor em risco condicional (CVaR), que considera apenas os valores dos desvios negativos, o que permite contemplar as piores possíveis perdas do portfólio, ou seja, o cenário de maior prejuízo.

Além de um modelo de risco, o problema de otimização de portfólios de investimento apresenta um conjunto de restrições, sendo uma delas a restrição de cardinalidade. Essa restrição impõe um número de ativos que a carteira deve conter e transforma o problema em $\mathcal{NP}$-Completo [Chang et al., 2000]. O problema é de otimização combinatória e métodos exatos não conseguem encontrar soluções ótimas em tempo polinomial, fator que motiva a implementação de métodos heurísticos para resolução do problema, para assim obter soluções próximas do ótimo em tempo hábil.

2.1. Modelo Utilizado

O modelo multiobjetivo deste trabalho (Equações 1-4) é formulado visando maximizar o retorno e minimizar o risco, utilizando o CVaR como medida de risco conforme formulado por [Rockafellar e Uryasev, 2002].

$$\min_{x \in X} \quad \zeta + (1-\alpha)^{-1} \sum_{j=1}^{J} \pi_j [f(x, y_j) - \zeta]^+ \tag{1}$$

$$\max_{x \in X} \quad \sum_{i=1}^{N} w_i \mu_i \tag{2}$$

sujeito a

$$\sum_{i=1}^{N} z_i = k \tag{3}$$

$$\sum_{i=1}^{N} w_i = 1 \tag{4}$$

$$z_i \in \{0, 1\}, \forall i = 1, \ldots, N$$

$$0 \leq w_i \leq 1, \forall i = 1, \ldots, N$$

A variável ζ é o VaR do portfólio, α representa o nível de significância estabelecido, π_j é a probabilidade de ocorrência de um cenário j, $f(x, y_j)$ é a função de perda para o cenário j, N refere-se ao número de ativos considerados, w_i indica a proporção de investimento do capital no ativo i, μ_i é a média histórica de retornos do ativo i e z_i é uma variável de decisão que indica se o ativo i está no portfólio ou não.

As funções objetivo são definidas pelas Equações 1, que representa a minimização do risco, aplicando o CVaR, e 2 que refere-se à maximização do retorno do portfólio. A Equação 3 modela a restrição de cardinalidade, fazendo com que o somatório das variáveis de decisão z seja igual a cardinalidade k estipulada e a Equação 4 certifica que todo o capital disponível é investido em algum ativo i.

3. Algoritmos Propostos

Considerando o problema apresentado na Seção 2, identifica-se que não é viável obter soluções utilizando métodos exatos. Isso ocorre devido a existência de variáveis inteiras no modelo, tornando-o um problema combinatório. Esse aumento na complexidade computacional, portanto, desfavorece o uso de métodos que encontram a solução exata para uma instância qualquer.

Dentre os métodos que são utilizados na literatura destacam-se os algoritmos evolutivos, que permitem gerar um conjunto de soluções a cada execução do algoritmo, o que é interessante para problemas multiobjetivo, cuja solução é uma fronteira de Pareto. Um dos métodos utilizados

https://proceedings.science/p/106680?lang=pt-br

para esse problema é o NSGA-II [Liagkouras e Metaxiotis, 2015], que é uma variação do algoritmo genético para problemas multiobjetivos.

Nesse trabalho explora-se o NSGA-II, alterando-se a parametrização identificada na literatura [Liagkouras e Metaxiotis, 2015] para melhor caracterizar o problema considerado. Além disso, será utilizado também o algoritmo BRKGA (*Biased Random-Key Genetic Algorithm*), uma variação moderna do algoritmo genético [Gonçalves e Resende, 2011], que até então não foi aplicado na resolução desse tipo de problema, conforme revisão da literatura. Por fim, será realizado uma combinação dos dois algoritmos evolutivos, NSGA-II e BRKGA, agregando os pontos relevantes de cada método em um único algoritmo híbrido.

3.1. *Biased Random-Key Genetic Algorithm* (BRKGA)

O *Biased Random-Key Genetic Algorithm* (BRKGA) proposto por [Gonçalves e Resende, 2011] é uma variante do método de algoritmos genéticos com chaves aleatórias de [Bean, 1994]. O BRKGA provê uma alteração no processo evolutivo, mais precisamente na operação de cruzamento. Essa alteração consiste na garantia de que um dos indivíduos envolvidos no processo tenha *fitness* relativamente melhor do que o outro, ou seja, um dos indivíduos faz parte de um conjunto com os melhores indivíduos da população, chamado de conjunto elite.

O BRKGA é um modelo genérico que quando aplicado à problemas específicos, a única alteração necessária é no decodificador das chaves, desde que o problema tenha um único objetivo. Como o problema de otimização de portfólios de investimento é multiobjetivo, ele deve ser adaptado para se enquadrar neste modelo. Uma possível solução é combinar os dois objetivos (minimizar risco e maximizar retorno) em um único objetivo [Konak et al., 2006], e para este estudo optou-se por maximizar a razão entre retorno e risco.

As soluções são codificadas como indivíduos com duas fitas de cromossomos, com n chaves aleatórias (valores no intervalo $[0, 1)$), uma para a identificação dos ativos e outra para a quantidade de lotes, sendo n a quantidade de ativos na base de dados.

O papel do decodificador na implementação é de receber um indivíduo codificado e retornar uma solução para o problema de otimização. Para o problema de otimização de portfólios de investimento com restrição de cardinalidade, uma solução consiste em um conjunto de k pares de valores (x, w) $|x \in \mathbb{Z}$ e $w \in \mathbb{R}$, sendo que cada par representa um ativo x selecionado e a quantidade de lotes w para o respectivo ativo, sendo k a cardinalidade do portfólio.

Entretanto, para que a solução seja factível, todos os ativos x devem ser únicos e a soma dos lotes w deve ser igual a 1, satisfazendo respectivamente as restrições de cardinalidade e de total investimento de capital.

Para decodificar os ativos, uma estratégia de seleção de subconjunto foi utilizada. Nesta decodificação, o vetor de chaves é ordenado de maneira crescente, mantendo seus índices originais em um vetor auxiliar. Os k primeiros elementos do vetor auxiliar formam o vetor de ativos decodificado. Para decodificar os lotes, basta selecionar as k primeiras chaves e normalizar o resultado para que a soma dos valores seja igual a 1.

3.2. *Non-Dominated Sorting Genetic Algorithm* II (NSGA-II)

Diante das limitações dos algoritmos evolutivos que utilizam ordenação não dominada em relação aos quesitos complexidade computacional e falta de elitismo, [Deb et al., 2000] propuseram uma nova abordagem para o *Non-Dominated Sorting Genetic Algorithm* (NSGA), o NSGA-II.

Os autores evoluíram a estratégia utilizando um método diferente para efetuar a ordenação não dominada, reduzindo a complexidade do algoritmo de $O(mN^3)$ para $O(mN^2)$, sendo N o tamanho da população e m o número de objetivos. Ademais, um novo operador de seleção foi

implementado. Esse operador combina as populações atual e próxima e seleciona as soluções de acordo com *fitness* e espaçamento, originando elitismo no processo evolutivo.

Como o algoritmo NSGA-II foi utilizado em outros trabalhos [Liagkouras e Metaxiotis, 2015], na revisão bibliográfica analisada identificou-se possíveis melhorias na implementação deste algoritmo, devido ao fato de que tanto os operadores de mutação quanto os de *crossover* mais utilizados na literatura [Liagkouras e Metaxiotis, 2015] descaracterizam as soluções, sendo necessário o desenvolvimento de rotinas de reparo para recompor os indivíduos de modo que estes apresentem soluções factíveis.

A implementação proposta do NSGA-II tem como objetivo: (i) explorar operadores mais rebuscados para os processos de mutação e *crossover*, de modo que o processo evolutivo não desenvolva indivíduos que representem soluções infactíveis, assim tornando desnecessário qualquer tipo de procedimento de reparo e (ii) implementar uma rotina de parametrização adaptativa com o intuito de controlar a exploração do espaço de busca, fazendo com que a busca seja globalizada no começo da evolução e intensificada no final da evolução.

Assim como no BRKGA, as soluções são codificadas como duas fitas de cromossomos, porém cada fita tem k genes, sendo k a cardinalidade do portfólio. A fita de ativos é composta por números inteiros que representam um dos n ativos e a fita de lotes é composta por números reais no intervalo $[0, 1)$.

O processo evolutivo começa com a seleção de $p/2$ pares de indivíduos que serão usados no *crossover*. Esses pares são selecionados utilizando o torneio binário, onde cada pai é escolhido à partir de um torneio. Para escolher o indivíduo mais apto no torneio, recorre-se ao método de ordenação não dominada de [Deb et al., 2000]. Dados os dois concorrentes no torneio, o vencedor é aquele que pertence à melhor fronteira não ordenada, ou em caso de pertencerem à mesma fronteira, vence aquele com maior distância de aglomeração [Ferreira et al., 2017].

O *crossover* é feito em duas etapas. Primeiro, os ativos dos pais são permutados utilizando o operador PMX introduzido originalmente por [Goldberg et al., 1985]. Na sequência, os lotes são recombinados utilizando o *Crossover* Aritmético descrito em [Michalewicz, 2013]. Esses operadores garantem gerar apenas soluções factíveis, tornando dispensável o uso de qualquer método de reparo.

A mutação também é realizada em duas etapas. Para os ativos, o processo troca aleatoriamente um dos ativos presentes na solução por um ativo ausente. Para os lotes, a mutação utilizada foi a gaussiana fixa, descrita em [Hinterding, 1995], usando distribuição gaussiana com média $\mu = 0$ e desvio padrão $\sigma = 0.01$.

Para comparar com a implementação realizada, um algoritmo com os operadores mais populares na literatura conforme indicado por [Liagkouras e Metaxiotis, 2015] também será desenvolvido, com o objetivo de constatar ou não melhorias nos resultados obtidos.

3.3. Combinação do BRKGA com NSGA-II

Um dos desafios da aplicação do BRKGA para otimização de portfólios de investimento é o fato de que sua modelagem foi originalmente proposta para problemas de otimização mono-objetivo, que não é o caso do problema de otimização de portfólios proposto. Para contornar essa problemática, [Konak et al., 2006] enumera duas possíveis abordagens: combinar os objetivos em uma única função, estratégia utilizada no algoritmo exposto na Seção 3.1, ou resolver o problema para todos os objetivos simultaneamente.

Para adaptar o BRKGA para resolver um problema multiobjetivo, sem unir os objetivos em um único, propõe-se a combinação do mesmo com o NSGA-II, fazendo com que o BRKGA seja responsável pelo processo evolutivo e o NSGA-II seja responsável pela avaliação de *fitness* e

elitismo da população. Efetivamente, a estrutura do BRKGA se mantém a mesma e seus operadores são os mesmos que explanados na Seção 3.1. Entretanto, as etapas de avaliação e seleção de indivíduos são executadas pelas rotinas do NSGA-II.

4. Análise Experimental

Um conjunto de experimentos foi realizado com o intuito de investigar a eficácia dos algoritmos propostos em relação à estratégia estudada na literatura atual. [Deb, 2009] afirma que algoritmos multiobjetivo devem ser analisados de acordo com dois fatores: proximidade da fronteira gerada com a fronteira Pareto Ótima e diversidade das soluções não dominadas. Esses dois critérios foram os influenciadores para a seleção das métricas de análise, explanadas a seguir.

4.1. Medidas de Desempenho

[Jiang et al., 2014] classifica as métricas de desempenho em: capacidade (quantificação do conjunto de soluções não dominadas), convergência (estimação da proximidade do conjunto de soluções encontrado com a fronteira de Pareto Ótima) e diversidade (mensuração da distribuição das soluções na fronteira). Considerando esta classificação, optou-se por avaliar os algoritmos utilizando as métricas: Cobertura de dois conjuntos (métrica de capacidade), Hipervolume (métrica de convergência e diversidade) e Distribuição Δ (métrica de diversidade). A formulação das respectivas métricas é apresentada na Tabela 1.

Métrica	Fórmula	Autor
Cobertura (C)	$C(S_1, S_2) = \frac{\lvert\vec{s_2} \in S_2 \lvert \exists \vec{s_1} \in S_1 : \vec{s_1} \preceq \vec{s_2}\rvert}{\lvert S_2 \rvert}$	[Zitzler e Thiele, 1998]
Hipervolume (HV)	$HV(S, R) = volume(\bigcup_{i=1}^{\lvert S \rvert} v_i)$	[Zitzler e Thiele, 1998]
Distribuição (Δ)	$\Delta(S) = \sum_{i=1}^{\lvert S \rvert - 1} \frac{d_i - \bar{d}}{\lvert S \rvert - 1}$	[Deb et al., 2000]

Tabela 1: Formulação das métricas C, HV e Δ

4.2. Análise dos Algoritmos Propostos

Todos os experimentos foram realizados com as 65 ações pertencentes ao índice Bovespa, com indicadores referentes à Janeiro de 2019 [Bovespa, 2019]. Foram utilizadas séries históricas de 4 anos (Janeiro de 2015 até Dezembro de 2018) para os 65 ativos. Os testes e os dados foram divididos em duas classes: análise estatística dos algoritmos com séries históricas de um ano (2015) e análise dos algoritmos em uma simulação com séries históricas de três anos (2016-2018).

Os algoritmos explanados na Seção 3 são respectivamente identificados por: BRKGA, NSGA-M (releitura do NSGA-II), BRKNSGA e NSGA-L, que refere-se a implementação do NSGA-II conforme parâmetros e operadores mais usados na literatura [Liagkouras e Metaxiotis, 2015], desenvolvido com o intuito de comparação com os algoritmos propostos.

Os parâmetros de execução foram: tamanho da população $p = 500$, com 500 iterações em cada execução; para o BRKGA, tamanho do conjunto elite $p_e = 50$, tamanho do conjunto mutante $p_m = 100$ e probabilidade de herança de alelos do indivíduo elitista $\rho_e = 0.70$ e para o NSGA-II, taxa de crossover $cr = 0.95$ e taxa de mutação $mr = 0.05$.

Para avaliar o desempenho dos algoritmos, foram realizados testes com 30 execuções para cada um. O primeiro teste foi desenvolvido para gerar as fronteiras não dominadas para as cardinalidades 3, 9 e 15. A escolha para esses valores de cardinalidade sustenta-se no trabalho de [Cheng e Gao, 2015], que afirma que os portfólios de maior desempenho não possuem mais de 15

https://proceedings.science/p/106680?lang=pt-br

ativos. As Figuras 1, 2 e 3 mostram a fronteira não dominada da combinação das soluções referentes as 30 execuções de cada algoritmo para as respectivas cardinalidades.

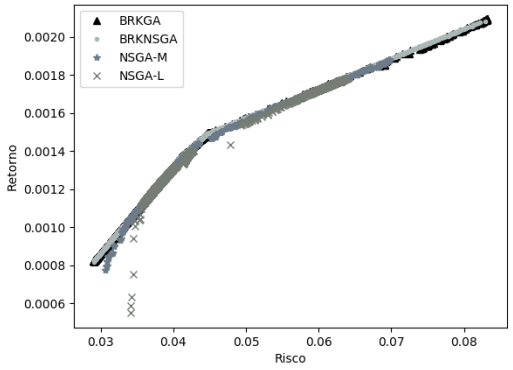


Figura 1: Fronteiras não dominadas para cardinalidade 3

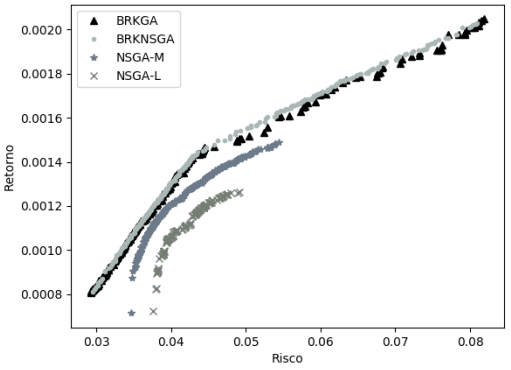


Figura 2: Fronteiras não dominadas para cardinalidade 9

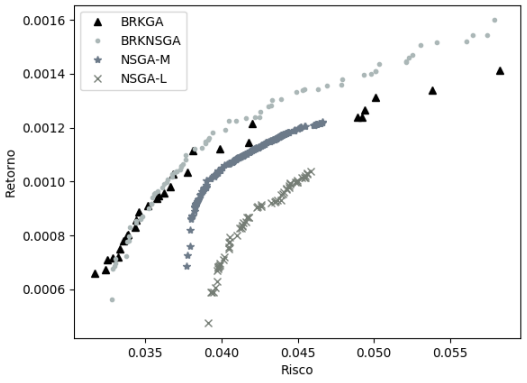


Figura 3: Fronteiras não dominadas para cardinalidade 15

Percebe-se que, para cardinalidade 3, os algoritmos apresentaram fronteiras extremamente próximas, que sobrepõem-se no gráfico. Esta ocorrência deve-se ao fato de que existem menos combinações no espaço de busca quando comparado com os espaços de busca explorados para cardinalidades 9 e 15, tanto que a sobreposição de fronteiras é menor (Figura 2) ou até mesmo inexistente (Figura 3) para esses casos. A análise dos gráficos mostra que as estratégias usando o BRKGA sobressaem neste experimento para as cardinalidades 9 e 15, principalmente o algoritmo híbrido BRKNSGA.

Para a métrica C, que mede o percentual de cobertura de um conjunto de soluções em relação a outro, observa-se que o híbrido BRKNSGA também se destaca, conforme dados presentes na Tabela 2. Quanto maior o valor de $C(S_1, S_2)$, melhor a cobertura do conjunto S_1 em relação ao conjunto S_2. Embora os valores da métrica C para o BRKGA sejam superiores às estratégias que utilizam apenas o NSGA-II, o BRKNSGA apresenta resultados melhores, principalmente para cardinalidades 9 e 15. Como exemplo, as células em negrito na Tabela 2 ilustram esse fato, mostrando que as soluções do BRKNSGA dominam mais de 58% das soluções do BRKGA para cardinalidade

9 e mais de 55% das soluções para cardinalidade 15.

Cardinalidade	Algoritmo	BRKGA	BRKNSGA	NSGA-M	NSGA-L
3	BRKGA	-	0.18598	0.85829	0.96892
	BRKNSGA	0.08426	-	1.00000	1.00000
	NSGA-M	0.00113	0.00000	-	0.71950
	NSGA-L	0.00028	0.00000	0.01823	-
9	BRKGA	-	0.16159	1.00000	1.00000
	BRKNSGA	**0.58685**	-	1.00000	1.00000
	NSGA-M	0.00000	0.00000	-	1.00000
	NSGA-L	0.00000	0.00000	0.00000	-
15	BRKGA	-	0.15789	1.00000	1.00000
	BRKNSGA	**0.55172**	-	1.00000	1.00000
	NSGA-M	0.00000	0.00000	-	1.00000
	NSGA-L	0.00000	0.00000	0.00000	-

Tabela 2: Resultados para métrica C

A métrica hipervolume indica que quanto maior o seu valor, mais próximo o conjunto S está da fronteira Pareto Ótima e mais igualmente espaçadas as soluções estão entre si. O *boxplot* da Figura 4 demonstra superioridade dos algoritmos BRKGA e BRKNSGA.

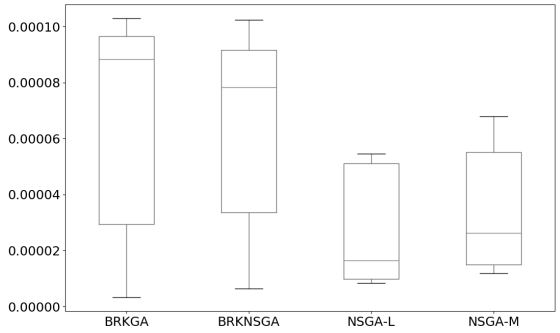


Figura 4: Hipervolume por algoritmo

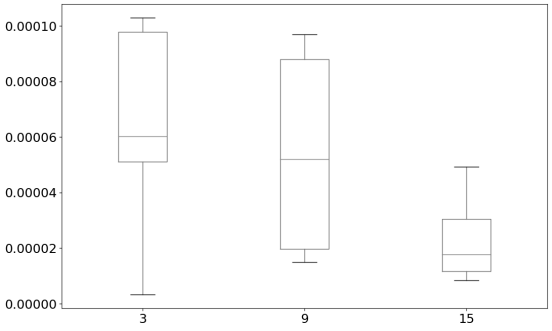


Figura 5: Hipervolume por cardinalidade

Considerando diferentes cardinalidades, os portfólios gerados com 15 ativos apresentam pior desempenho (Figura 5), concordando com os resultados das fronteiras (Figura 3). Esta conclusão advém de que as fronteiras geradas possuem espaçamento mais acentuado do que as fronteiras para portfólios com cardinalidade 3 (Figura 1) e 9 (Figura 2). Comparando os valores para cardinalidades 3 e 9, conclui-se que a dispersão para cardinalidade 3 é maior (Figura 5), portanto a cardinalidade 9 tem potencial para gerar portfólios melhores com um número menor de execuções do algoritmo.

Com o intuito de avaliar mais detalhadamente as informações obtidas pelos *boxplots*, o teste ANOVA 2 fatores foi realizado. A Tabela 3 apresenta o resultado do teste, que detectou diferenças entre os algoritmos e cardinalidades, além da interação entre esses dois fatores, com nível de confiança de 5%.

A partir desses dados, testes de Tukey foram aferidos para detectar quais grupos apresentaram diferenças estatisticamente significativas. Comparando os algoritmos BRKGA e BRKNSGA, que apresentaram melhor resultado para hipervolume, o par apresenta médias significativamente diferentes para cardinalidade 3, conforme primeira linha da Tabela 4. Para as cardinalidades 3 e 9,

https://proceedings.science/p/106680?lang=pt-br

Fonte	SS	df	MS	F	p-valor
Algoritmo	1.302472×10^{-7}	3	4.341573×10^{-8}	217.723477	1.690350×10^{-79}
Cardinalidade	1.374557×10^{-7}	2	6.872785×10^{-8}	344.660069	2.923880×10^{-83}
Interação	4.007043×10^{-8}	6	6.678405×10^{-9}	33.491216	7.580074×10^{-32}
Erro	6.939386×10^{-8}	348	1.994076×10^{-10}		

Tabela 3: ANOVA 2 fatores de hipervolume para diferentes algoritmos e cardinalidades

a diferença de médias para o par é significativa para o BRKNSGA, mas não para o BRKGA, vide primeira linha da Tabela 5. Isso indica que o BRKNSGA apresenta resultados igualmente bons tanto para cardinalidade 3 quanto para cardinalidade 9.

Par	3	9	15
BRKGA x BRKNSGA	**x**		
BRKGA x NSGA-M	x	x	x
BRKGA x NSGA-L	x	x	x
BRKNSGA x NSGA-M	x	x	x
BRKNSGA x NSGA-L	x	x	x
NSGA-M x NSGA-L		x	

Tabela 4: Teste de Tukey para hipervolume entre algoritmos para diferentes cardinalidades

Par	BRKGA	BRKNSGA	NSGA-M	NSGA-L
3 x 9		**x**	x	x
3 x 15	x	x	x	x
9 x 15	x	x		x

Tabela 5: Teste de Tukey para hipervolume entre cardinalidades para diferentes algoritmos

Para a distribuição Δ, quanto menor o valor de $\Delta(S)$, melhor o espalhamento das soluções do conjunto S, sendo que $\Delta(S) = 0$ indica precisamente igual espaçamento entre as soluções de S ([Ferreira et al., 2017]). Os resultados dos *boxplots* das Figuras 6 e 7 apontam superioridade dos algoritmos fundamentados no NSGA-II, com destaque para o NSGA-M, certamente pelo fato das fronteiras geradas pelos algoritmos serem mais condensadas que as fronteiras geradas pelo BRKGA, principalmente para cardinalidade 15 (Figura 3).

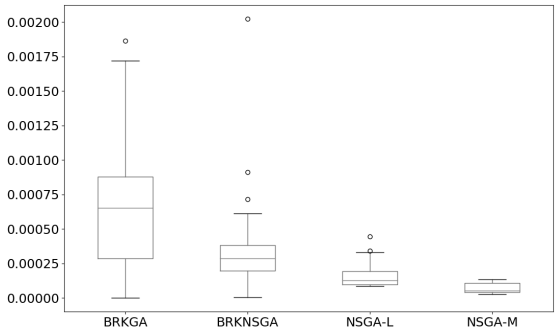


Figura 6: Distribuição Δ por algoritmo

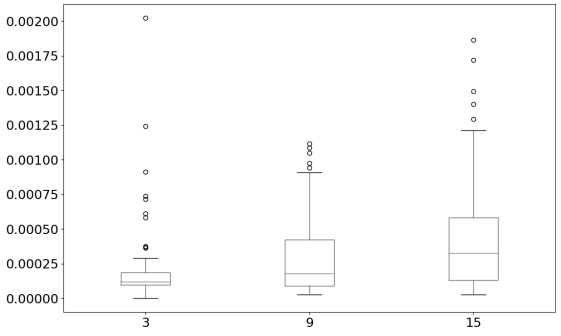


Figura 7: Distribuição Δ por cardinalidade

Para confirmar o que foi mostrado nos *boxplots*, o teste ANOVA 2 fatores foi utilizado. A Tabela 6 mostra o resultado do teste, que comprova que existe diferença estatística para os algoritmos e cardinalidades, assim como para a interação os dois fatores, com nível de significância de 5%.

Com os dados obtidos a partir do teste ANOVA, testes de Tukey foram efetuados para identificar diferença entre grupos. Repara-se que, para o par NSGA-M e NSGA-L, o teste não constatou diferença entre as médias para cardinalidades 3 e 9, de acordo com a última linha da Tabela 7. No ponto de vista individual dos algoritmos (Tabela 8), a única diferença significativa é

https://proceedings.science/p/106680?lang=pt-br

Fonte	SS	df	MS	F	p-valor
Algoritmo	0.000019	3	6.330000×10^{-6}	200.972122	1.298555×10^{-75}
Cardinalidade	0.000003	2	1.500000×10^{-6}	50.828452	4.299798×10^{-20}
Interação	0.000005	6	8.330000×10^{-7}	26.454463	6.227172×10^{-26}
Erro	0.000011	348	3.160920×10^{-8}		

Tabela 6: ANOVA 2 fatores para métrica Δ para diferentes algoritmos e cardinalidades

para o NSGA-M no par de cardinalidades 3 e 15. Quando comparados com o BRKGA e com o BRKNSGA, os algoritmos demonstram diferença nas médias na maior parte dos casos, tanto para algoritmo quanto para cardinalidade.

Par	3	9	15
BRKGA x BRKNSGA		x	x
BRKGA x NSGA-M	x	x	x
BRKGA x NSGA-L	x	x	x
BRKNSGA x NSGA-M	x	x	x
BRKNSGA x NSGA-L	x	x	x
NSGA-M x NSGA-L			x

Tabela 7: Teste de Tukey para métrica Δ entre algoritmos para diferentes cardinalidades

Par	BRKGA	BRKNSGA	NSGA-M	NSGA-L
3 x 9	x			
3 x 15	x	x	**x**	
9 x 15	x	x		

Tabela 8: Teste de Tukey para métrica Δ entre cardinalidades para diferentes algoritmos

4.3. Simulação

Os resultados obtidos na Seção 4.2 indicam que os portfólios com cardinalidade 3 e 9 sobressaem em comparação com os de 15. Os algoritmos que se destacam foram BRKNSGA (melhor fronteira e cobertura), BRKGA (hipervolume) e NSGA-M (Δ). Para identificar qual algoritmo gera maior retorno acumulado, optou-se por utilizar cardinalidade igual a 9, pois na prática portfólios com mais ativos geram menos risco aos investidores [Cesarone et al., 2016].

Cada um dos algoritmos foi executado 30 vezes e para cada execução a carteira com maior razão retorno/risco foi selecionada. Posteriormente, cada carteira foi submetida à simulação utilizando as séries históricas de 2016 até 2018, gerando um total de 30 curvas de retorno acumulado por tempo. Finalmente, a média entre as curvas foi calculada, para comparação com a média dos outros algoritmos e com o *benchmark* do índice Ibovespa. A Figura 8 apresenta o retorno acumulado proporcionado por cada algoritmo para portfólios com cardinalidade 9.

Pode-se constatar que o mercado brasileiro teve um bom desempenho geral no período analisado, afirmação evidenciada pelo retorno acumulado do Ibovespa (Figura 8). Observou-se melhor desempenho dos algoritmos BRKGA e BRKNSGA, mostrando-se mais adequados para resolução do problema estudado. Contudo, o NSGA-M e o NSGA-L também conseguiram resultados superiores ao *benchmark*, provando que também são bons algoritmos.

5. Considerações Finais

Este trabalho propôs três algoritmos, BRKGA, BRKNSGA, e uma releitura do NSGA-II para otimização de portfólios de investimento. Os resultados obtidos em um estudo de caso real apresentam indicativos estatisticamente significantes de que os algoritmos propostos possibilitam a escolha de carteiras com bom desempenho para os investidores.

Os experimentos evidenciam o potencial do BRKGA e do BRKNSGA, que conseguiram produzir resultados reveladores. O desempenho do algoritmo híbrido BRKNSGA foi satisfatório em

https://proceedings.science/p/106680?lang=pt-br

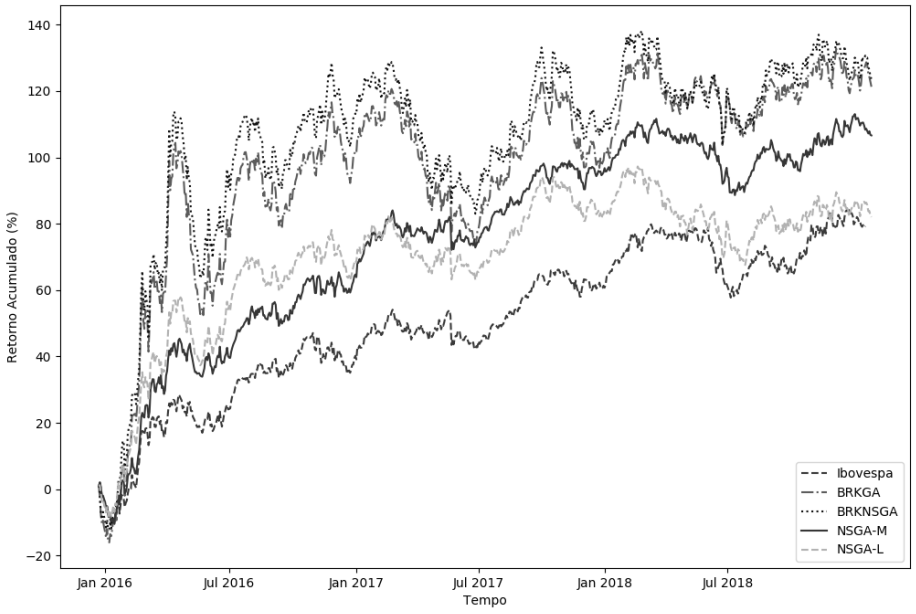


Figura 8: Simulação dos algoritmos para cardinalidade 9

todos os experimentos, mostrando que a combinação das heurísticas BRKGA e NSGA-II resulta em uma ferramenta interessante para a resolução do problema.

Verifica-se que a heurística de chaves aleatórias contribui para a elaboração de portfólios que geram maior razão retorno/risco na média. Ao que tudo indica, os algoritmos que usam a heurística de chaves aleatórias apresentam melhor desempenho à medida que a cardinalidade aumenta, pois conseguem melhor explorar o espaço de busca.

No caso dos algoritmos NSGA-M e NSGA-L, constatou-se que a utilização de operadores mais adequados para o problema influencia no resultado final. Entende-se que é de fundamental importância estudar o comportamento dos operadores e as consequências de sua implementação no algoritmo, pois a mudança deles foi suficiente para produzir melhores resultados.

Como proposta para trabalhos futuros, sugere-se aplicar a estratégia de chaves aleatórias para modelos mais complexos do problema, verificando seu potencial diante de um modelo com mais restrições e até mesmo mais objetivos. Outra sugestão é a investigação e otimização dos parâmetros para o BRKGA, que mesmo sem nenhum refinamento obteve resultados relevantes.

Referências

Anagnostopoulos, K. P. e Mamanis, G. (2011). The mean–variance cardinality constrained portfolio optimization problem: An experimental evaluation of five multiobjective evolutionary algorithms. *Expert Systems with Applications*, 38(11):14208–14217.

Barroso, B. C., Ferreira, F. G., Hanaoka, G. P., Paiva, F. D., e Cardoso, R. T. (2017). Composition of investment portfolios through a combinatorial multiobjective optimization model using cvar. In *2017 IEEE Congress on Evolutionary Computation (CEC)*, p. 1795–1802. IEEE.

Bean, J. C. (1994). Genetic algorithms and random keys for sequencing and optimization. *ORSA journal on computing*, 6(2):154–160.

Bovespa (2019). Composição do Índice Bovespa. `http://www.b3.com.br/pt_br/market-data-e-indices/indices/indices-amplos/indice-ibovespa-ibovespa-composicao-da-carteira.htm`. Acessado: 2016-01-07.

Cesarone, F., Moretti, J., Tardella, F., et al. (2016). Optimally chosen small portfolios are better than large ones. *Economics Bulletin*, 36(4):1876–1891.

Chang, T.-J., Meade, N., Beasley, J. E., e Sharaiha, Y. M. (2000). Heuristics for cardinality constrained portfolio optimisation. *Computers & Operations Research*, 27(13):1271–1302.

Cheng, R. e Gao, J. (2015). On cardinality constrained mean-CVaR portfolio optimization. In *The 27th Chinese Control and Decision Conference (2015 CCDC)*, p. 1074–1079. IEEE.

Deb, K. (2009). *Multi-Objective Optimization Using Evolutionary Algorithms*. Wiley, ISBN 9780470743614.

Deb, K., Agrawal, S., Pratap, A., e Meyarivan, T. (2000). A fast elitist non-dominated sorting genetic algorithm for multi-objective optimization: Nsga-ii. In *International conference on parallel problem solving from nature*, p. 849–858. Springer.

Ferreira, F. G. D. C., Barroso, B. C., e Cardoso, R. T. N. (2017). Comparação de algoritmos metaheurísticos para otimização combinatória multiobjetivo de portfólios financeiros. *XLIX SBPO*.

Goldberg, D. E., Lingle, R., et al. (1985). Alleles, loci, and the traveling salesman problem. In *Proceedings of an international conference on genetic algorithms and their applications*, volume 154, p. 154–159. Lawrence Erlbaum, Hillsdale, NJ.

Gonçalves, J. F. e Resende, M. G. (2011). Biased random-key genetic algorithms for combinatorial optimization. *Journal of Heuristics*, 17(5):487–525.

Hinterding, R. (1995). Gaussian mutation and self-adaption for numeric genetic algorithms. In *Proceedings of 1995 IEEE International Conference on Evolutionary Computation*, p. 384. IEEE.

Jiang, S., Ong, Y.-S., Zhang, J., e Feng, L. (2014). Consistencies and contradictions of performance metrics in multiobjective optimization. *IEEE transactions on cybernetics*, 44(12):2391–2404.

Konak, A., Coit, D. W., e Smith, A. E. (2006). Multi-objective optimization using genetic algorithms: A tutorial. *Reliability Engineering & System Safety*, 91(9):992–1007.

Liagkouras, K. e Metaxiotis, K. (2015). Efficient portfolio construction with the use of multiobjective evolutionary algorithms: Best practices and performance metrics. *International Journal of Information Technology & Decision Making*, 14(03):535–564.

Markowitz, H. (1952). Portfolio selection. *The journal of finance*, 7(1):77–91.

Michalewicz, Z. (2013). *Genetic algorithms + data structures = evolution programs*. Springer Science & Business Media.

Rockafellar, R. T. e Uryasev, S. (2002). Conditional value-at-risk for general loss distributions. *Journal of banking & finance*, 26(7):1443–1471.

Zitzler, E. e Thiele, L. (1998). Multiobjective optimization using evolutionary algorithms—a comparative case study. In *Int. conf. on parallel problem solving from nature*, p. 292–301. Springer.

https://proceedings.science/p/106680?lang=pt-br