Detecção de fraude em eleições com urnas eletrônicas: uma estratégia puramente estatística

Daniel Chicayban Bastos¹
Luis Antonio Brasil Kowada¹
Maria Cristina Bessa Moreira²

¹Universidade Federal Fluminense
Instituto de Computação
Av. Gal. Milton Tavares de Souza
São Domingos, Niterói, RJ, 24210-310

²Universidade Federal Fluminense
Instituto de Matemática e Estatística
Rua Professor Marcos Waldemar de Freitas Reis
São Domingos, Niterói, RJ, 24210-201

Resumo. *Apresentamos uma estratégia estatística de detecção de fraude, estimação da proporção de fraude e convalidação do resultado de eleições baseadas em urnas eletrônicas. Assumimos a possibilidade de que a auditoria das urnas eletrônicas não seja perfeita quando a urna é fraudulenta, ou seja, existe uma probabilidade de que a auditoria não detecte a fraude. O tipo da auditoria considerada é a da votação paralela. A estratégia fornece o número de urnas que precisam ser auditadas para que o erro na estimativa da proporção de urnas fraudulentas seja inferior ao erro máximo aceitável com a confiança desejada.*

Abstract. *We present a statistical strategy for fraud detection, estimating the proportion of fraudulent machines and result validation of elections based on electronic voting machines. We assume the auditing procedure is not perfect, meaning the procedure detects a fraudulent machine with a certain probability. By auditing, we mean the Brazilian votação paralela. The strategy produces the number of machines to be audited so that the error in estimating the proportion of fraud is less than the maximum acceptable error with the desired confidence.*

1. Introdução

Um aspecto de segurança é proteger um objeto contra violações. Outro aspecto é detectar a suposta violação que não foi possível evitar. Ambos aspectos são essenciais e necessários ao processo eleitoral brasileiro. Mesmo que a urna eletrônica utilizada no Brasil seja considerada segura, não se obtém resultado satisfatório quando não se sabe, ao fim das eleições, se os perdedores da corrida eleitoral de fato perderam, o que é premissa essencial para um sistema eleitoral transparente [van de Graaf 2017,

Autores listados em ordem alfabética. Veja declaração da AMS em <https://goo.gl/rzBAq9>.

capítulo 3, página 26]. É necessário uma estratégia capaz de convalidar o resultado eleitoral, provando-o legítimo, mesmo que a urna brasileira não possua segurança acima de todas as expectativas.

Independente da segurança do equipamento composto pela urna eletrônica adotada no Brasil, é preciso detectar qualquer fraude que possa ocorrer durante determinada eleição bem como mensurar o tamanho dessa fraude com uma margem de erro aceitável e com alta confiança na medida. Por exemplo, saber se houve fraude em determinada eleição é necessário, mas não é suficiente: precisamos do tamanho da fraude. Faz diferença sabermos se 60% das urnas foram adulteradas ou se 1% o foram. Ao estimarmos a proporção de urnas fraudadas, também precisamos saber o quão exata é a medida. Se a estimativa acusa certo percentual de urnas fraudadas, mas a margem de erro é muito grande, o resultado pode não permitir a tomada de decisão necessária — convalidar ou anular as eleições. Se numa eleição com exatos 1% de votos fraudulentos, um vencedor possui 10% de votos a mais que seu oponente, esse 1% de fraude não nos impede de convalidar o resultado, uma vez que mesmo concedendo todos os votos fraudulentos a favor do candidato perdedor, ainda assim ele não ganharia as eleições. Uma eleição é um procedimento caro; anulá-la representa grande perda financeira. É o último recurso.

Além da margem de erro, outra informação essencial numa estimativa é a confiança da medida. É certamente concebível que uma estimativa de fraude não reflita o verdadeiro percentual da fraude durante determinadas eleições, afinal uma estimativa não é a medida exata, isto é, não é o parâmetro populacional. A amostra coletada, por razões do acaso, pode gerar uma estimativa não próxima do verdadeiro valor. Sendo assim, qualquer argumento capaz de convalidar o resultado de uma eleição precisa possuir alta confiança, tornando remota a chance de que a estimativa seja mero resultado do acaso, provando estatisticamente a validade da medição que se usa para sustentar a convalidação do resultado.

Na eleição brasileira, quantas urnas eletrônicas se deve auditar para se estimar o percentual de urnas fraudadas com uma margem de erro de 1% e confiança de 99%, dada uma probabilidade de 75% da auditoria classificar como fraudulenta uma urna fraudulenta? Responderemos a essa pergunta.

1.1. A votação paralela como parte do procedimento de auditoria

Em 2018, o TSE alterou a Resolução 23.550 de 18 de dezembro de 2017, que dispõe, dentre outros temas, sobre a auditoria de funcionamento das urnas eletrônicas e dos procedimentos de segurança dos dados dos sistemas eleitorais. Eis o procedimento de sorteio *in verbis* [TSE 2018, artigo 53, incisos I, II, III]:

Art. 53. Para a realização da auditoria de funcionamento das urnas, deverão ser sorteados, por turno, em cada Unidade da Federação, os seguintes quantitativos de seções eleitorais:

I - 6 (seis) nas Unidades da Federação com até 15.000 (quinze mil) seções no cadastro eleitoral, sendo as 3 (três) primeiras urnas sorteadas submetidas à auditoria de funcionamento das urnas eletrônicas sob condições normais de uso e as demais, à auditoria mediante verificação da autenticidade e integridade dos sistemas;

- II - 12 (doze) nas Unidades da Federação que tenham de 15.001 (quinze mil e uma) a 30.000 (trinta mil) seções no cadastro eleitoral, sendo as 4 (quatro) primeiras urnas sorteadas submetidas à auditoria de funcionamento das urnas eletrônicas sob condições normais de uso e as demais, à auditoria mediante verificação da autenticidade e integridade dos sistemas;
- III - 15 (quinze) nas demais Unidades da Federação, sendo as 5 (cinco) primeiras urnas sorteadas submetidas à auditoria de funcionamento das urnas eletrônicas sob condições normais de uso e as demais, à auditoria mediante verificação da autenticidade e integridade dos sistemas.

A auditoria de funcionamento das urnas eletrônicas sob condições normais de uso consiste na votação paralela [TSE 2013], enquanto a auditoria mediante verificação da autenticidade e integridade dos sistemas refere-se a análises do *software* e do *hardware*.

Depreende-se da resolução que existe uma preocupação em auditar na votação paralela um certo número de urnas, descrito pela Tabela 1, mas não está claro que esse número é adequado. Sem um número de urnas adequado, não se pode estimar o percentual de fraude nas eleições dentro de um intervalo de erro aceitável com alta confiança. Sem essa estimativa, não se pode provar aos candidatos perdedores que eles de fato perderam, violando premissa essencial para um sistema eleitoral transparente [van de Graaf 2017, capítulo 3, página 26].

Tabela 1. Urnas auditadas pela votação paralela em função da unidade federativa

unidade federativa	urnas auditadas
até 15.000	3
de 15.001 a 30.000	4
acima de 30.000	5

Análises do *software* e do *hardware* utilizados como urna eletrônica nas eleições brasileiras revelam graves preocupações relativas à segurança do equipamento [Aranha et al. 2004, Aranha et al. 2018, van de Graaf 2002]. Todavia, mesmo que o equipamento da urna eletrônica não seja reprovado em qualquer teste de segurança, ele não é capaz de provar aos candidatos perdedores que eles de fato perderam.

Paralelamente a isso, quando há fraude em determinada eleição, mesmo que verificações de segurança sejam capazes de detectá-la, a detecção da fraude por si só não prova a invalidade do resultado: é preciso estimar o percentual da fraude e garantir com adequada confiança que a estimativa encontra-se dentro de um erro máximo tolerável.

Relativo ao teste da auditoria de urnas, é concebível que o procedimento usado pela auditoria seja ora mais, ora menos eficaz, o que lhe atribui uma probabilidade de detecção de fraude dada uma urna fraudulenta. A medida de eficácia do teste da auditoria é tipicamente chamada de sensibilidade do teste. A estratégia apresentada é parametrizada por essa medida.

Em resumo, apresentamos (1) um argumento probabilístico de detecção de fraude, determinando o tamanho da amostra necessária em função da probabilidade

desejada e propomos (2) uma estratégia estatística para determinar o número de urnas que deve ser auditado de forma que se mantenha o erro na estimativa da proporção de urnas fraudulentas na população de urnas inferior ao erro máximo tolerável com a confiança desejada, dispensando conhecimento interno da urna.

2. Suposições iniciais

Seja A o teste da auditoria efetuado nas urnas. O teste pode responder F , significando fraude, ou L , significando urna legítima. Similarmente, uma urna U pode ser F de fraudulenta ou L de legítima.

Quando uma urna é legítima, ela se comporta perfeitamente. Assumimos portanto que a probabilidade da auditoria testar uma urna legítima e concluir que seja fraudulenta é 0. Em símbolos,

$$P(A=L|U=L) = 1 \text{ e } P(A=F|U=L) = 0.$$

Por outro lado, quando a urna é fraudulenta, ela pode se passar por legítima se o teste não for perfeito, ou seja, existe uma probabilidade $0 < t < 1$ de que a auditoria detecte a fraude, o que é tipicamente chamado de *sensibilidade* do teste. Em símbolos,

$$P(A=F|U=F) = t \text{ e } P(A=L|U=F) = 1 - t, \text{ com } 0 < t < 1.$$

3. Um exemplo da probabilidade de detecção de fraude

Suponha que 5% das urnas de uma eleição sejam fraudulentas. Suponha também que, quando uma urna é fraudulenta, a auditoria a detecte como fraudulenta em 70% dos casos. Qual a probabilidade de que uma urna seja classificada como fraudulenta escolhendo-se uma urna aleatoriamente na população? Dado que $P(A=F|U=F) = 0,70$, o teorema das probabilidades totais nos garante que

$$\begin{aligned} P(A=F) &= P(A=F|U=F)P(U=F) + P(A=F|U=L)P(U=L) \\ &= 0,70 \times 0,05 + 0 \times 0,95 = 0,035. \end{aligned}$$

Então a probabilidade de se escolher uma urna aleatoriamente e detectá-la como fraudulenta é 0,035 num universo de 5% de urnas fraudulentas uniformemente distribuídas. Como os eventos $A=F$ e $A=L$ são complementares, obtemos a probabilidade de 0,965 da auditoria detectar uma urna como legítima.

Dando continuidade ao exemplo, analisemos o que ocorre com a probabilidade de detecção de fraude à medida que a auditoria testa urnas em série. Seja X a variável aleatória que represente o número de urnas fraudulentas extraídas da população de urnas e considere, como exemplo, três extrações em série. Então $X = \{0, 1, 2, 3\}$. Assuma que a extração de uma urna não altere a proporção de urnas fraudulentas na população de urnas, ou seja, assumamos que a extração é com reposição. Então

$$X \sim \text{Binomial}(n = 3, p = 0,035).$$

Logo, a probabilidade de detecção de fraude é

$$P(X \geq 1) = 1 - P(X < 1) = 1 - P(X=0)$$

$$\begin{aligned}
&= 1 - P(A=L)^3 \\
&= 1 - 0,965^3 \approx 0,10.
\end{aligned}$$

Se desejamos, entretanto, uma probabilidade maior de revelar a fraude, como 0,99, precisamos procurar pelo número real n que satisfaça

$$\begin{aligned}
1 - P(A=L)^n &= 0,99 \\
1 - 0,965^n &= 0,99 \\
0,965^n &= 0,01 \\
n &= \ln 0,01 / \ln 0,965 \approx 129,26.
\end{aligned}$$

O número de urnas portanto precisa ser $\lceil 129,26 \rceil = 130$.

4. Determinação do tamanho da amostra

Determinamos o tamanho mínimo necessário para a amostra de urnas a serem testadas para que se detecte uma fraude, com probabilidade γ , em uma população de urnas com proporção θ de urnas fraudulentas. Essa proporção é desconhecida, sendo necessário usar um valor que se suponha próximo à realidade.

Proposição 4.1. Seja γ a probabilidade desejada de detecção de fraude numa população de urnas com probabilidade $t\theta$ de se encontrar, retirando-se ao acaso, uma urna fraudulenta, sendo t a sensibilidade do teste com o qual se testa uma urna e θ , a proporção de urnas fraudulentas na população de urnas. Seja X a variável aleatória que represente o número de urnas fraudulentas extraídas de uma amostra de tamanho n . Assumindo uma extração com reposição, o tamanho n da amostra de urnas é

$$n = \left\lceil \frac{\ln(1 - \gamma)}{\ln(1 - t\theta)} \right\rceil.$$

Prova. Se a extração é com reposição, então $X \sim \text{Binomial}(n, t\theta)$. Detectar uma fraude com probabilidade γ é encontrar pelo menos uma urna fraudulenta com probabilidade γ , ou seja, procura-se pelo número real m que satisfaça

$$P(X \geq 1) = 1 - P(A=L)^m = 1 - (1 - t\theta)^m = \gamma,$$

sendo $P(A=L)^m$ a probabilidade de se retirar m urnas legítimas da população de urnas. Isolando m , obtemos

$$\begin{aligned}
(1 - t\theta)^m &= 1 - \gamma \\
m &= \frac{\ln(1 - \gamma)}{\ln(1 - t\theta)}.
\end{aligned}$$

O tamanho mínimo da amostra é o menor número natural $n > m$, ou seja,

$$n = \left\lceil \frac{\ln(1 - \gamma)}{\ln(1 - t\theta)} \right\rceil.$$

□

Se não for possível obter uma amostra no tamanho mínimo necessário para a desejada probabilidade de detecção de fraude, pode-se usar a amostra disponível em detrimento de queda na probabilidade de detecção. A Tabela 2 mostra o decaimento da probabilidade de detecção em função da diminuição do tamanho da amostra e da sensibilidade do teste da auditoria, supondo uma proporção $\theta = 0,05$ de urnas fraudulentas na população de urnas. Usamos três valores para a sensibilidade do teste: $t = 1$, uma auditoria perfeita; $t = 0,5$, o pior caso, equivalente ao lançamento de uma moeda e $t = 0,75$, um valor intermediário.

Tabela 2. Decaimento da probabilidade de detecção com respeito à diminuição do tamanho da amostra n e da sensibilidade t dado $\theta = 0,05$

n	200	100	50	25	12
$t = 0,5$	0,99	0,92	0,72	0,47	0,26
$t = 0,75$	0,99	0,98	0,85	0,62	0,37
$t = 1$	0,99	0,99	0,92	0,72	0,46

A Figura 1 mostra o crescimento da probabilidade de detecção de fraude em função do crescimento do tamanho da amostra. As linhas tracejadas indicam o tamanho da amostra, $n = 19$, em que a probabilidade de detecção de fraude é superior a 0,5.

Figura 1. O crescimento da probabilidade de detecção de fraude em função do tamanho da amostra usando $\theta = 0,05$ e sensibilidade $t = 0,75$.

5. A necessidade de uma análise estatística

A análise probabilística determina o tamanho da amostra necessária para provar a existência de fraude com uma determinada probabilidade. Essa amostra pode ser usada para estimar a proporção de urnas fraudulentas, mas o argumento não leva em consideração qualquer margem de erro na estimativa para a determinação do tamanho da amostra. A inferência estatística [Bussab and Morettin 2010, capítulo 10], por outro lado, nos provê uma estratégia.

6. Uma estimativa da proporção de fraude

Construímos agora um estimador $\hat{\theta}$ com o qual estimamos θ , a proporção de urnas fraudulentas na população de urnas, com arbitrária margem de erro ϵ .

Seja A_i o teste efetuado na i -ésima urna aleatoriamente escolhida da população de urnas. Defina

$$A_i(U) = \begin{cases} 1 & \text{se auditoria acusa fraude em } U \\ 0 & \text{senão} \end{cases}$$

Assim, cada A_i se comporta como uma variável aleatória de Bernoulli com parâmetro $t\theta$, onde $t = P(A=F|U=F)$, a sensibilidade do teste a que cada urna da amostra será submetida. Então [Bussab and Morettin 2010, exemplo 11.1],

$$Y_n := \sum_{i=1}^n A_i \sim \text{Binomial}(n, t\theta)$$

é a variável aleatória que representa o número de urnas fraudulentas detectadas numa amostra aleatória de n urnas. Portanto, um estimador da proporção $\hat{\theta}$ de urnas fraudulentas é

$$\hat{\theta} := \frac{Y_n}{nt}.$$

O estimador $\hat{\theta}$ tem distribuição binomial [Bussab and Morettin 2010, seção 7.5], que, para n suficientemente grande, pode ser aproximada pela distribuição normal, segundo o Teorema Central do Limite [Bussab and Morettin 2010, seção 10.9], com média e variância dadas por

$$\begin{aligned} E(\hat{\theta}) &= \frac{1}{tn} E(Y_n) = \frac{nt\theta}{nt} = \theta \\ V(\hat{\theta}) &= \frac{1}{n^2t^2} V(Y_n) = \frac{1}{n^2t^2} nt\theta(1-t\theta) \approx \frac{\theta_0(1-t\theta_0)}{nt}, \end{aligned}$$

respectivamente, o valor esperado e a variância do estimador $\hat{\theta}$, sendo θ_0 a proporção de fraude que se supõe existir na população de urnas.

Construído o estimador, obtemos agora uma expressão de n em função de ϵ , t , θ_0 e a confiança desejada γ , concluindo o argumento. Se ϵ representa o erro máximo na estimação de θ , então interessa-nos uma amostra de tamanho n tal que

$$P(|\hat{\theta} - \theta| < \epsilon) \geq \gamma.$$

Observemos que

$$P(|\hat{\theta} - \theta| < \epsilon) = P(-\epsilon < \hat{\theta} - \theta < \epsilon) = 1 - 2P(\hat{\theta} - \theta > \epsilon)$$

pela simetria da distribuição normal. Padronizamos a distribuição de $\hat{\theta}$ com a transformação

$$Z = \frac{\hat{\theta} - \theta}{\sqrt{\frac{\theta_0(1-t\theta_0)}{nt}}}.$$

Assim,

$$P(\hat{\theta} - \theta > \epsilon) = P\left(Z > \epsilon \left(\frac{\theta_0(1 - t\theta_0)}{nt}\right)^{-1/2}\right) \leq \frac{1 - \gamma}{2},$$

sendo $Z \sim \text{Normal}(0, 1)$. Seja z_0 o valor tal que $P(Z > z_0) = (1 - \gamma)/2$. Então

$$\begin{aligned} \epsilon \left(\frac{\theta_0(1 - t\theta_0)}{nt}\right)^{-1/2} &\geq z_0 \\ \epsilon^2 \left(\frac{nt}{\theta_0(1 - t\theta_0)}\right) &\geq z_0^2 \\ n &\geq \frac{z_0^2 \theta_0(1 - t\theta_0)}{t\epsilon^2}. \end{aligned} \quad (1)$$

Como o valor calculado representa o número de urnas a serem auditadas, o tamanho da amostra deve ser pelo menos $\lceil n \rceil$ urnas.

7. Um exemplo de obtenção do tamanho da amostra

Seja $t = 0,75$ a sensibilidade do teste de auditoria. Seja $\epsilon = 0,01$ o erro máximo tolerável para a estimativa de θ . Seja $\gamma = 0,99$ a confiança desejada e, por fim, arbitremos uma proporção inicial $\theta_0 = 0,05$. O valor z_0 correspondente à confiança de 0,99 na distribuição normal padrão é aproximadamente 2,5758. Assim, pela Equação 1, precisamos auditar $n = 4.258$ urnas.

Usando os valores deste exemplo, a Figura 2 mostra como a sensibilidade do teste e a confiança afetam o tamanho da amostra de urnas. Observa-se que a variação da confiança tem impacto mais agudo no tamanho da amostra que a variação da sensibilidade. A linha tracejada mostra o número de urnas necessárias, 3.152, se o teste da auditoria for perfeito, isto é, se possuir sensibilidade 1, mantidos os outros valores deste exemplo.

Figura 2. Impacto no tamanho da amostra usando $\epsilon = 0,01$ e $\theta_0 = 0,05$.

Na Tabela 3 listamos o número de urnas que devem ser auditadas em função da proporção de fraude θ_0 inicialmente suposta e de três valores da sensibilidade do

teste da auditoria: $t = 1$, uma auditoria perfeita; $t = 0,5$, o pior caso, equivalente ao lançamento de uma moeda e $t = 0,75$, um valor intermediário, o qual utilizamos no exemplo.

Tabela 3. Número de urnas auditadas em função de θ_0

θ_0	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,10	0,15	0,20
$t = 0,5$	1.321	2.628	3.922	5.202	6.470	12.607	18.412	23.886
$t = 0,75$	879	1.743	2.595	3.433	4.258	8.184	11.777	15.040
$t = 1$	657	1.301	1.931	2.548	3.152	5.972	8.460	10.616

8. Sobre a sensibilidade do teste de auditoria e a proporção θ_0

Para estimar a sensibilidade do teste de auditoria, deve-se submeter ao procedimento de teste um conjunto de urnas fraudulentas. A sensibilidade é a proporção de urnas detectadas como fraudulentas.

A proporção θ_0 deve corresponder à proporção de fraude que se aproxime da realidade. Se essa informação não for conhecida, o valor $t\theta_0 = 0,5$ evita que se subestime o tamanho da amostra. Logo, $\theta_0 = 0,5/t$.

9. Sobre a extração com reposição

O argumento apresentado assume a extração com reposição. A situação real, entretanto, envolve extrações sem reposição. Para comparar ambas situações, com e sem reposição, fizemos uma simulação da auditoria em ambos os casos.

Na Figura 3, os pontos pretos representam a confiança em função da proporção de fraude em uma simulação da auditoria sem reposição, o caso real. Similarmente, os brancos representam a simulação com reposição. A curva representa a relação analítica entre a confiança e a proporção de fraude considerando a amostragem com reposição. (A linha tracejada indica a confiança mínima de 0,67 que é atingida com $\theta = 2/3$.) Há uma evidente similaridade em ambas simulações e a curva para percentuais de fraude até 20%, indicando que, até 20% de fraude, não há diferença de resultado em determinar o tamanho da amostra com ou sem reposição.

As simulações seguem os valores do exemplo, ou seja, sensibilidade da auditoria de 0,75, amostra de tamanho 4.258, erro máximo aceitável de 0,01. Para a população, usamos 600 mil urnas.

10. Sobre a generalidade da estratégia

O argumento estatístico apresentado não se restringe a urnas eletrônicas. Dispensa-se conhecimento interno da urna exatamente pela generalidade da estratégia. Mesmo usando-se urnas convencionais, com cédulas de papel, deve-se auditar uma amostra de urnas de tamanho adequado afim de eventualmente convalidar o resultado, provando aos perdedores que o resultado é legítimo. Similarmente, ao se conceber uma urna eletrônica com impressão de comprovante, é necessário acoplar uma impressora a cada urna que faça parte da amostra.

Figura 3. Simulações da confiança em amostragem com e sem reposição.

A estratégia apresentada é um procedimento geral de auditoria, do qual eleições com urnas eletrônicas, urnas tradicionais e instalação de impressoras para comprovantes em papel são apenas casos particulares.

11. Conclusões

Admitindo que a auditoria detecte uma urna fraudulenta com uma dada probabilidade, tipicamente chamada de sensibilidade do teste, determinamos (1) o tamanho da amostra de urnas que devem ser auditadas para que se tenha a probabilidade desejada de detecção e (2) determinamos o tamanho da amostra de urnas que devem ser auditadas para que a estimativa da proporção de urnas fraudadas na amostra esteja próxima da proporção de fraude na população de urnas com um erro máximo aceitável e confiança desejada. Assumimos uma escolha aleatória com reposição. Verificamos por meio de simulação que o argumento se mantém válido para uma situação real, sem reposição.

Na estratégia estatística, estimada a proporção de urnas fraudadas, é possível estimar a proporção de votos fraudados e assim torna-se eventualmente possível convalidar o resultado das eleições pela via do argumento estatístico apresentado.

A estratégia apresentada é geral e baseia-se não somente numa auditoria como a votação paralela [TSE 2013], não necessitando de conhecimento sobre o funcionamento interno da urna, sendo aplicável a eleições tradicionais com uso da cédula em papel.

Referências

- Aranha, D., Barbosa, P. Y. S., Cardoso, T. N. C., de Araújo, C. L., and Matias, P. (2018). The return of software vulnerabilities in the brazilian voting machine. Technical report, Universidade de Campinas, Universidade Federal de Campina Grande, Hekima, Universidade Federal de Pernambuco, Universidade Federal de São Carlos.
- Aranha, D., Karam, M. M., de Miranda, A., and Scarel, F. B. (2004). Software vulnerabilities in the brazilian voting machine. In Zissis, D. and Lekkas, D.,

editors, *Design, Development, and Use of Secure Electronic Voting Systems*. IGI Global.

Bussab, W. and Morettin, P. A. (2010). *Estatística Básica*. Saraiva, 6a edition.

TSE (2013). Resolução n. 23.397, 17 de dezembro de 2013. *Diário da Justiça Eletrônico do Tribunal Superior Eleitoral*, 248:2–10. Dispõe sobre a cerimônia de assinatura digital e fiscalização do sistema eletrônico de votação, do registro digital do voto, da votação paralela e dos procedimentos de segurança dos dados dos sistemas eleitorais.

TSE (2018). Resolução n. 23.574, 29 de maio de 2018. *Diário da Justiça Eletrônico do Tribunal Superior Eleitoral*, 122:111–114. Altera a Resolução-TSE n. 23.550, de 18 de dezembro de 2017, que dispõe sobre a cerimônia de assinatura digital e fiscalização do sistema eletrônico de votação, do registro digital do voto, da auditoria de funcionamento das urnas eletrônicas e dos procedimentos de segurança dos dados dos sistemas eleitorais.

van de Graaf, J. (2002). Tecnologia eleitoral e a urna eletrônica. Technical report, Universidade Federal de Minas Gerais, Universidade Federal de Santa Catarina, Belo Horizonte, MG, Florianópolis, SC.

van de Graaf, J. (2017). O mito da urna: <http://www.o-mito-da-urna.org>.