

INTRODUÇÃO A MODELOS DE PLANEJAMENTO DE ESTOQUES E DE PRODUÇÃO

Leonardo Lustosa (PUC-Rio)
Fernanda Raupp (IMPA/LNCC)

Minicurso SBPO

8-9 de agosto de 2018

Objetivos

- Apresentar e discutir modelos matemáticos de problemas da Engenharia de Produção, particularmente referentes a decisões de dimensionamento de produção e estoques de itens.
- Expor um campo de aplicação de PO pouco divulgado no Brasil.
- Proporcionar uma experiência na modelagem matemática de realidades que envolvem aspectos físicos e econômicos nas indústrias.

Sobre elaboração de modelos

- A inclusão de aspectos da realidade que não são relevantes para a tomada de decisão pode obscurecer aspectos essenciais e tornar o modelo menos útil para seu propósito.
- A exclusão de aspectos fundamentais pode tornar o modelo inútil.
- Portanto, um bom modelo deve incluir *apenas tudo* que é relevante para seu propósito.

Sobre problemas quantitativos de gerência da produção

- É esperado que suas soluções sejam obtidas por otimização de seus modelos de custo.
- Mais importante do que obter soluções ótimas é explorar os problemas por meio de análises “que tal se” através de seus modelos.
- Aqui, introduziremos problemas clássicos e seus modelos básicos serão construídos passo a passo.
- Ainda, problemas práticos de natureza diversa são vistos como extensões de modelos básicos.

Problema do tamanho do lote de reposição

Aborda modelos de produção de um item isolado com demanda determinística e constante.

- Modelo básico - Modelo EOQ
- Modelo com desconto por quantidade
- Modelo com aumento de preço iminente

Modelo básico

- Problema: suponha uma situação do comércio varejista em que o gerente do supermercado deseja saber em que quantidade e quando o item sal de cozinha deve ser encomendado, de modo a minimizar o custo total e satisfazer integralmente a demanda.
- Sabemos que o sal de cozinha tem:
 - Custo estável ao longo do tempo,
 - Demanda em quantidade praticamente constante e fluxo contínuo.
- Problema clássico conhecido como determinação do tamanho do lote econômico de compra (economic order quantity - EOQ)

Custos relevantes

- custo de encomendar: custo de fazer uma encomenda independente do seu tamanho
- custo de manter estoque: custo de oportunidade do dinheiro empatado no estoque mais os custos de seguro contra roubo e incêndio, de armazenagem e de movimentação no depósito
- custo de aquisição da encomenda

Considerações iniciais

- 1 A taxa de demanda anual pelo item é constante e determinística.
- 2 A quantidade encomendada do item pode ser um número qualquer e não há restrições quanto à quantidade.
- 3 Não pode haver falta do item.
- 4 O valor ou preço unitário de aquisição do item é constante e independe da quantidade encomendada.
- 5 Os custos de encomendar, adquirir a encomenda e manter estoques são constantes, conhecidos e invariantes no tempo, e compõem o custo total.
- 6 Não se considera a existência de outros itens.
- 7 O tempo de reposição é constante e conhecido.
- 8 O lote encomendado chega integralmente num mesmo instante.
- 9 O horizonte de planejamento é longo (virtualmente infinito) e os parâmetros não variam.

Notação

- Q quantidade fixa a ser encomendada do item por período (unidades do item)
- T tempo do ciclo ou período (ano)
- N número de encomendas (i.e. de ciclos) num ano
- r taxa de manter o estoque (\$/\$/ano)
- v valor ou preço unitário do item (\$)
- A custo de encomendar ou fazer uma encomenda (\$)
- D taxa de demanda (unidades do item/ano)
- H custo unitário de manter o item em estoque ($H = rv$) (\$/ano)
- I nível de estoque (unidades do item)
- CTA custo total anual do item (\$/ano)

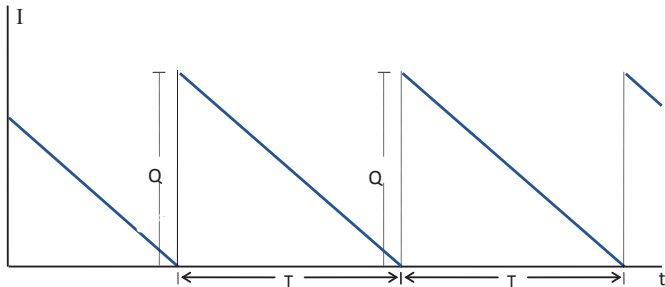
Parâmetros e variáveis do modelo básico

- Parâmetros: r , v , A , D e H .
- Observamos as seguintes relações fixas:

$$N = \frac{D}{Q} \quad T = \frac{Q}{D} = \frac{1}{N}.$$

- Portanto, podemos escolher a variável de decisão: Q , N ou T

Variação do estoque ao longo do tempo



Modelo do custo total anual

- Custo anual de encomendar

$$C_E = AN = AD/Q, \quad Q > 0.$$

- Custo anual de manter estoque

$$C_M = \frac{Q}{2}H = \frac{Q}{2}vr$$

- Custo anual de aquisição do item

$$C_A = Dv$$

- Portanto, o custo total anual é dado por

$$CTA(Q) = \frac{AD}{Q} + \frac{Q}{2}vr + Dv.$$

Proposição 1. *CTA é uma função estritamente convexa em $Q > 0$ que tem seu mínimo em*

$$EOQ = \sqrt{\frac{2AD}{vr}}.$$

De fato, a primeira derivada da função é

$$\frac{dCTA}{dQ}(Q) = -\frac{AD}{Q^2} + \frac{vr}{2}.$$

Igualando-a a zero e resolvendo para $Q > 0$, temos

$$\frac{dCTA}{dQ}(Q^*) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad Q^* = \sqrt{\frac{2AD}{vr}}.$$

Da segunda derivada da função, temos para $Q > 0$ que

$$\frac{d^2CTA}{dQ^2}(Q) = \frac{2AD}{Q^3} > 0.$$

Função do custo relevante total anual

$$CRT(Q) = \frac{AD}{Q} + \frac{Q}{2}vr.$$

Custo relevante total ótimo

$$CRT(EOQ) = \frac{AD}{\sqrt{\frac{2AD}{vr}}} + \frac{\sqrt{\frac{2AD}{vr}}}{2}vr = \sqrt{\frac{ADvr}{2}} + \sqrt{\frac{ADvr}{2}} = \sqrt{2ADvr}.$$

Observe que o custo de encomendar ótimo é igual ao custo de manter estoque ótimo.

Tempo de ciclo ótimo

$$T_{EOQ} = EOQ/D.$$

Exemplo numérico 1

Determine o tamanho do lote econômico de um item, usando os seguintes dados com suas unidades padrão:

D	A	v	r
100	10,00	200,00	0,2

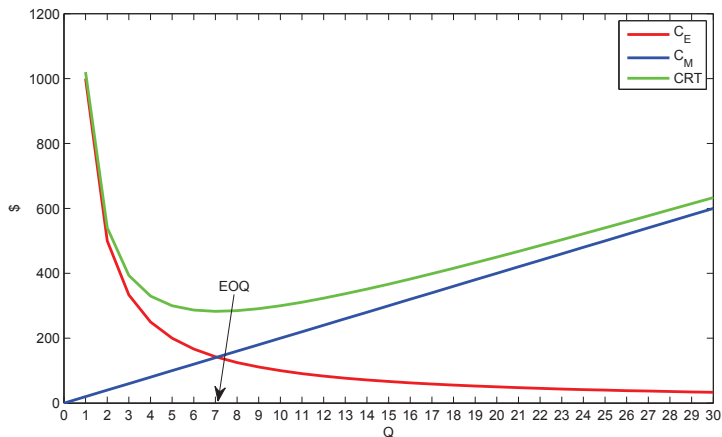
Solução

Substituindo os valores dos parâmetros na fórmula de EOQ , obtemos:

$$EOQ = \sqrt{\frac{2AD}{vr}} = \sqrt{\frac{2(10)(100)}{200(0,2)}} = 7,1$$

$$CRT(EOQ) = \sqrt{2ADvr} = \sqrt{2(10)(100)(200)(0,2)} = 282,8.$$

Exemplo numérico 1 - Solução gráfica



CRT , C_E , C_M em função das quantidades do item

Sensibilidade aos parâmetros

Das fórmulas de EOQ , $CRT(EOQ)$ e T_{EOQ} , vê-se que os valores ótimos do lote a ser encomendado, do custo relevante total e da duração do ciclo são função da raiz quadrada dos parâmetros. Isso resulta em:

- os valores ótimos são pouco sensíveis a variações dos parâmetros; o custo ótimo aumenta sublinearmente com a demanda e com outros parâmetros.
- o custo total relevante ótimo é pouco sensível à escolha de um tamanho do lote próximo a EOQ .

Esse comportamento pode ser observado no gráfico de CRT em função de Q .

Modelo com desconto por quantidade

É comum obter descontos no valor unitário do item v , quando se encomenda lotes grandes.

- O fornecedor decide o *lote de referência* a partir do qual o desconto será concedido.
- Podemos ter *desconto incremental*: as primeiras q_1 unidades de uma encomenda Q vão custar v_1 , as seguintes $q_2 - q_1$ unidades vão custar v_2 ($< v_1$) e assim por diante até chegar a Q .
- Ou obter *desconto em todas as unidades*: se q_k for a maior quantidade limite menor do que Q , então será cobrado o valor v_k para todas as unidades da encomenda Q .

Vamos estudar o caso de desconto em todas as unidades em que a estrutura do preço unitário do item dada pelo fornecedor é

$$v = \begin{cases} v_0, & 0 \leq Q \leq \bar{Q} \\ v_1 = v_0(1 - d), & \bar{Q} \leq Q \end{cases} \quad (1)$$

onde

- v_0 é o preço unitário básico,
- v_1 é o preço unitário com desconto quando $Q \geq \bar{Q}$,
- d é a fração decimal do desconto ($0 < d < 1$),
- $\bar{Q}$ é o lote de referência.

Modelo de custo com desconto

Devemos incluir a parcela Dv na expressão do custo relevante total:

$$CRT(Q) = \begin{cases} CRT_0(Q) = \frac{AD}{Q} + \frac{Q}{2}v_0r + Dv_0, & 0 < Q \leq \bar{Q}, \\ CRT_1(Q) = \frac{AD}{Q} + \frac{Q}{2}v_1r + Dv_1, & \bar{Q} \leq Q. \end{cases}$$

Como $v_1 < v_0$, segue imediatamente que

- CRT é uma função descontínua em $\bar{Q}$,
- $CRT_1 < CRT_0$ para todo Q ,
- $EOQ_0 < EOQ_1$.

Devemos analisar três situações possíveis para determinar Q^*

- Se $EOQ_1 \geq \bar{Q}$, então $Q^* = EOQ_1$, pois, para $Q \geq \bar{Q}$, $CRT(Q) = CRT_1(Q)$ e $CRT_1(EOQ_1) \leq CRT_1(\bar{Q})$.
- Senão, se $EOQ_1 < \bar{Q}$, então precisamos comparar $CRT_0(EOQ_0)$ e $CRT_1(\bar{Q})$ no intervalo $0 < Q \leq \bar{Q}$:
 - se $CRT_0(EOQ_0) < CRT_1(\bar{Q})$, então o tamanho do lote ótimo a ser encomendado será EOQ_0 ;
 - senão, se $CRT_1(\bar{Q}) < CRT_0(EOQ_0)$, então o tamanho do lote ótimo será $\bar{Q}$.

Algoritmo

Início

Calcule EOQ_1

Se $EOQ_1 \geq \bar{Q}$, então $Q^* = EOQ_1$;

Senão

Calcule $CRT_0(EOQ_0)$ e $CRT_1(\bar{Q})$;

Faça $Q^* = \operatorname{argmin}\{CRT_0(EOQ_0), CRT_1(\bar{Q})\}$

Fim

Fim

Exemplo numérico 2

Um fornecedor oferece 5% de desconto para lotes com 100 ou mais unidades de 3 itens de varejo, cujos dados em unidades usuais estão na tabela a seguir:

Item	D	v_0	A	r
1	104	3,10	1,50	0,24
2	416	14,20	1,50	0,24
3	4160	2,40	1,50	0,24

Solução

Se $d = 0,05$, então $v_1 = v_0(1 - 0,05) = 0,95v_0$ é aplicado no desconto por quantidade para os 3 itens.

Solução Item 1

Verifica-se que $v_0 = 3,10$, $v_1 = 2,95$ e

$$EOQ_1 = \sqrt{\frac{2(1,50)(104)}{2,95(0,24)}} = 20,99 < \bar{Q} = 100.$$

Calculando

$$CRT(EOQ_0) = \sqrt{2(1,50)(104)(3,10)(0,24)} + 104(3,10) = 337,64,$$

$$CRT(\bar{Q}) = \frac{1,50(104)}{100} + \frac{100}{2}(2,95)(0,24) + 104(2,95) = 343,76,$$

temos que

$$CRT(EOQ_0) < CRT(\bar{Q}).$$

Então, é melhor abrir mão do desconto e encomendar o lote com tamanho

$$EOQ_0 = \sqrt{\frac{2(1,50)(104)}{3,10(0,24)}} = 20,48.$$

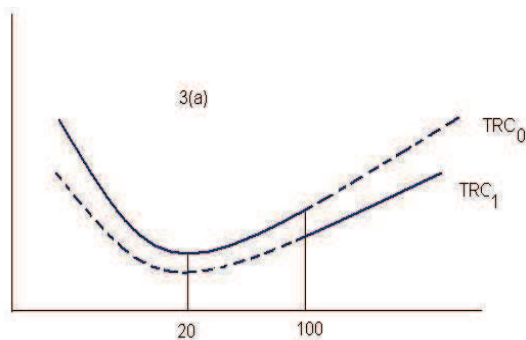


Figura: Item 1: desconto por quantidade

Solução Item 2

Verifica-se que $v_0 = 14,20$, $v_1 = 13,49$ e

$$EOQ_1 = \sqrt{\frac{2(1,50)(416)}{13,49(0,24)}} = 19,14 < \bar{Q} = 100.$$

Calculando

$$CRT(EOQ_0) = \sqrt{2(1,50)(416)(14,20)(0,24)} + 416(14,20) = 5.972,42,$$

$$CRT(\bar{Q}) = \frac{1,50(416)}{100} + \frac{100}{2}(13,49)(0,24) + 416(13,49) = 5.779,96,$$

tem-se que $CRT(\bar{Q}) < CRT(EOQ_0)$, então é melhor encomendar o tamanho do lote de referência $\bar{Q} = 100$, garantindo o desconto.

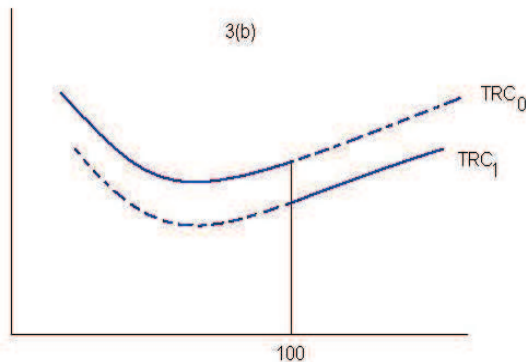


Figura: Item 2: desconto por quantidade

Solução Item 3

Verifica-se que $v_0 = 2,40$, $v_1 = 2,28$ e

$$EOQ_1 = \sqrt{\frac{2(1,50)(4160)}{2,28(0,24)}} = 151,02 > \bar{Q} = 100.$$

Ao encomendar a quantidade igual a EOQ_1 , o desconto fica imediatamente garantindo.

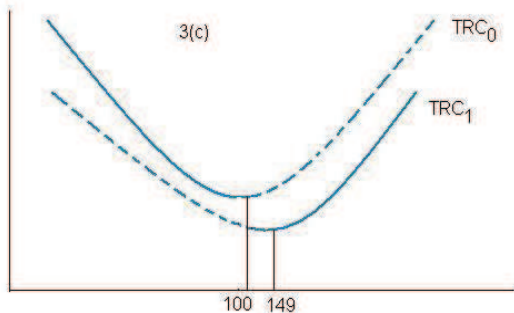


Figura: Item 3: desconto por quantidade

Modelo com aumento de preço iminente

- Quando se sabe com antecedência que o preço de um produto vai aumentar, pode ser interessante fazer uma encomenda maior que a usual, de forma a obter uma vantagem no preço.
- Deseja-se determinar a quantidade ótima do item Q^* que deve ser encomendada antes do incremento do preço, baseada na abordagem proposta por Naddor(1966).
 - A ideia central é considerar que a mudança do preço fará com que o lote econômico fique em outro patamar.
 - Considera-se ainda que a decisão de encomendar e o recebimento da nova encomenda ocorrem no exato instante em que o estoque se esgota e que o novo preço unitário seja conhecido.

Sejam

- v_1 preço unitário do item vigente, com tamanho de lote EOQ_1 ,
- v_2 novo preço, com tamanho do lote EOQ_2 .

Custo relevante total com v_2 é dado por

$$CRT(EOQ_2) = \sqrt{2ADv_2r} + Dv_2.$$

Ganho em encomendar Q com v_1 no período T é modelado por

$$\begin{aligned} G(Q) &= T(CRT(EOQ_2)) - T(CRT(Q)) \\ &= \frac{Q}{D}(\sqrt{2ADv_2r} + Dv_2) - \frac{Q}{D} \left(\frac{AD}{Q} + \frac{Q}{2}v_1r + Dv_1 \right) \\ &= \frac{Q}{D}(\sqrt{2ADv_2r} + Dv_2) - \left(A + Qv_1 + \frac{Q^2v_1r}{2D} \right). \end{aligned}$$

Proposição 2. G é uma função estritamente côncava em $Q > 0$.

De fato, da primeira derivada, tem-se que

$$\frac{dG}{dQ}(Q) = \frac{1}{D}(\sqrt{2ADv_2r} + Dv_2) - v_1 - \frac{Qv_1r}{D},$$

permitindo verificar a existência de um único ponto crítico

$$Q^* = \frac{CRT(EOQ_2) - Dv_1}{v_1r}.$$

Do cálculo da segunda derivada, tem-se que

$$\frac{d^2G}{dQ^2}(Q) = -\frac{v_1r}{D} < 0.$$

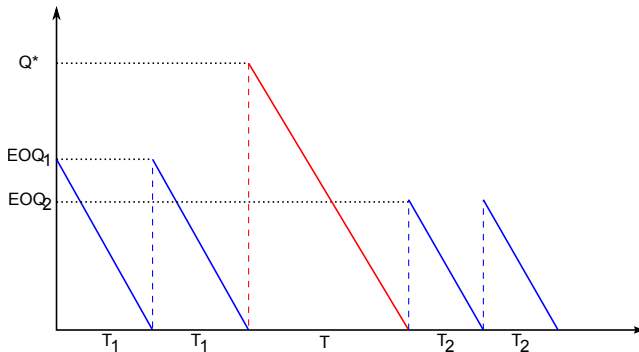
Tamanho do lote ótimo de máximo ganho com aumento de preço iminente é:

$$Q^* = \frac{CRT(EOQ_2) - Dv_1}{v_1 r}$$

ou, equivalentemente,

$$Q^* = \frac{v_2}{v_1} EOQ_2 + \frac{v_2 - v_1}{v_1 r} D.$$

Transição entre ciclos de estoques com proveito do aumento de preço



É possível verificar que $Q^* > EOQ_1$.

Exemplo numérico 3

Calcule o tamanho do lote a ser encomendado, sabendo que existe previsão de aumento de preço no item desejado.

Os valores dos parâmetros em suas unidades usuais são:

- $r = 0,2$,
- $v_1 = 15$,
- $v_2 = 20$,
- $A = 3$,
- $D = 100$.

Solução

Calcula-se primeiramente

$$EOQ_2 = \sqrt{\frac{2(3)(100)}{20(0,2)}} = 12,2,$$

$$Q^* = \frac{20}{15}12,2 + \frac{20 - 15}{15(0,2)}100 = 182,9.$$

O tempo de ciclo ótimo é

$$T^* = Q^*/D = 182,9/100 = 1,83 \text{ ano}.$$

Porém, note que o tempo de ciclo anterior tem sido menos de 2 meses:

$$EOQ_1 = \sqrt{\frac{2(3)(100)}{15(0,2)}} = 14,1 \Rightarrow T_1 = \frac{EOQ_1}{D} = 0,141 \text{ ano}.$$

Será que o item manterá a sua funcionalidade por um período tão longo de estocagem?

INTRODUÇÃO A MODELOS DE PLANEJAMENTO DE ESTOQUES E DE PRODUÇÃO

Leonardo Lustosa (PUC-Rio)
Fernanda Raupp (IMPA/LNCC)

Minicurso SBPO

8-9 de agosto de 2018

Vamos abordar agora problemas cuja principal dificuldade é incerteza na demanda. Exemplos:

- Quantos casacos uma loja deve encomendar no verão para vender no outono/inverno?
- Quantos bolos uma padaria deve assar para vender no final de semana?
- Quantos crachás um evento deve encomendar para distribuir entre os participantes?

Todos esses problemas têm estrutura análoga, muitas vezes resolvidos de forma intuitiva. Vamos aqui tratá-los com auxílio da estatística.

Problema do jornaleiro

Quantas unidades de um jornal o jornaleiro deve encomendar para vender em certo dia sem saber exatamente a sua demanda? Se comprar menos que a demanda, sua margem de lucro fica prejudicada. Se comprar a mais, terá que devolver as unidades que sobraram a um preço inferior ao pago inicialmente, o que também prejudica sua margem de lucro.

- Também é conhecido como Problema da Árvore de Natal.
- Tem aplicação direta em análise quantitativa de contratos e gestão de rendimentos em companhias de transporte aéreo e hotéis, por exemplo.
- Na maioria dos casos da prática, esse problema é resolvido de forma intuitiva, superestimando a demanda.
- Aqui, o resolveremos através de um modelo probabilístico.

- Problema: Queremos determinar a quantidade a ser encomendada de um item para um período particular com demanda incerta, de modo a minimizar o custo total.
- Aqui, a demanda incerta é expressa por uma variável aleatória com distribuição de probabilidade conhecida.
- É sabido que o item perde parte do seu valor após o período de interesse.
- Por hipótese, vamos supor que os custos de faltar e de sobrar são fixos e conhecidos, e que o custo de falta é maior que o custo de sobra.
- Primeiramente, vamos considerar que a demanda pelo item seja uma variável aleatória discreta.

Notação

- c_f custo por cada unidade do item que vier a faltar (\$)
- c_s custo por cada unidade do item que vier a sobrar (\$)
- Q quantidade do item a ser encomendada para o período particular (unidades)
- X demanda pelo item durante o período particular, variável aleatória não negativa (unidades do item)
- $p(x)$ probabilidade da demanda assumir o valor x ,
 $p(x) = 0 \quad \forall x < 0$
- $F(x)$ função de distribuição de probabilidade acumulada da demanda.

X como variável aleatória discreta

- 1 Seu espaço amostral Ω pode ser finito ou infinito.
- 2 A função de distribuição de probabilidade acumulada de X é definida para $x_i \in \Omega$ por

$$F(x) = \sum_{x_i \leq x} p(x_i).$$

- 3 Seu valor esperado é dado por $E[X] = \sum x_i p(x_i)$, onde $x_i \in \Omega$.

Modelo determinístico de custo total

$$C(Q) = \begin{cases} c_s(Q - x), & x \leq Q \\ c_f(x - Q), & x \geq Q \end{cases} .$$

Modelo determinístico de custo total

$$C(Q) = \begin{cases} c_s(Q - x), & x \leq Q \\ c_f(x - Q), & x \geq Q \end{cases}.$$

Modelo do custo total esperado

$$E[C(Q)] = c_s \sum_{x \leq Q} (Q - x)p(x) + c_f \sum_{x \geq Q} (x - Q)p(x).$$

- Pode-se provar que $E[C(Q)]$ é uma função convexa e unimodal, apesar de os limites dos somatórios dependerem de Q .
- Supondo que Q^* é o ponto de mínimo custo, segue que $E[C(Q^*)] < E[C(Q)]$ para todo $Q > 0$.

Fazendo a análise marginal do custo total esperado, temos que

$$\begin{aligned}\Delta E[C(Q)] &= E[C(Q+1)] - E[C(Q)] \\&= c_s \sum_{x \leq Q+1} (Q+1-x)p(x) + c_f \sum_{x \geq Q+1} (x-Q-1)p(x) \\&\quad - c_s \sum_{x \leq Q} (Q-x)p(x) - c_f \sum_{x \geq Q} (x-Q)p(x) \\&= c_s \sum_{x \leq Q} (Q+1-x)p(x) - c_s \sum_{x \leq Q} (Q-x)p(x) \\&\quad - c_f \sum_{x \geq Q+1} (x-Q)p(x) + c_f \sum_{x \geq Q+1} (x-Q-1)p(x) \\&= c_s \sum_{x \leq Q} p(x) - c_f \sum_{x \geq Q+1} p(x) \\&= c_s F(Q) - c_f (1 - F(Q)).\end{aligned}$$

Da condição de otimalidade de $E[C(Q)]$ em Q^* , temos que Q^* é o menor valor de Q tal que

$$\Delta E[C(Q^*)] = E[C(Q^* + 1)] - E[C(Q^*)] > 0.$$

Ou seja,

$$c_s F(Q^*) - c_f(1 - F(Q^*)) > 0 \quad \Leftrightarrow \quad F(Q^*) > \frac{c_f}{c_s + c_f}.$$

Portanto, tem-se que encontrar o menor valor de $F(Q^*)$ tal que a condição imediatamente acima seja satisfeita.

Exemplo numérico 4

(Aplicação em organização de evento temporário)

Um organizador de um evento científico deve decidir quantos CDs com trabalhos dos palestrantes devem ser encomendados.

- Não se sabe quantas pessoas irão se inscrever no evento.
- Custo de cada CD é R\$1,00.
- Se encomendar menos CDs do que o necessário, terá que fazer e enviar novos CDs, pagando R\$1,50 a mais por cada unidade.
- Se encomendar mais CDs que o necessário, as unidades que sobrarem serão descartadas.

- De sua experiência, o organizador tem estimativas para as possíveis demandas e suas probabilidades de ocorrência, conforme a tabela a seguir.

dem	prob	prob acum
100	0,15	0,15
150	0,20	0,35
200	0,30	0,65
250	0,20	0,85
300	0,15	1,00

Quantas unidades do CD devem ser encomendadas a fim de obter o custo total esperado mínimo?

Solução

Temos que:

- Q representa as unidades do CD encomendadas,
- o custo de sobra é $C_s = R\$1,00$,
- o custo de falta é $C_f = R\$2,25$.

Queremos encontrar o menor valor de Q de modo a satisfazer

$$F(Q) > c_f / (c_s + c_f) = 2,25 / (1,00 + 2,25) = 0,69.$$

Da tabela de estimativas de probabilidades acumuladas do organizador, verifica-se que o menor valor de $F(Q^*)$ que satisfaz $F(Q) > 0,69$ é $F(Q^*) = 0,85$, ou seja, $Q^* = 250$.

Solução

Nesse caso, o custo total esperado mínimo é dado por:

$$\begin{aligned} E[C(Q^*)] &= c_s \sum_{x \leq Q^*} (Q^* - x)p(x) + c_f \sum_{x \geq Q^*} (x - Q^*)p(x) \\ &= 1,00 \sum_{x \leq 250} (250 - x)p(x) + 2,25 \sum_{x \geq 250} (x - 250)p(x) \\ &= 1,00(250 - 100)p(100) + 1,00(250 - 150)p(150) \\ &\quad 1,00(250 - 200)p(200) + 2,25 \sum_{x \geq 250} (300 - 250)p(300) \\ &\quad 150(0,15) + 100(0,20) + 50(0,30) + 2,25(50)(0,15) \\ &= 22,5 + 20 + 15 + 16,875 = 74,375. \end{aligned}$$

Exemplo numérico 5

(Aplicação em gestão de rendimentos (*revenue management*))

Um voo de uma companhia aérea tem 10 assentos disponíveis. A tarifa plena de R\$500,00 é cobrada para cada assento. O custo marginal por ocupar um assento é R\$100,00, ou seja, por cada assento ocupado, a companhia gasta adicionalmente R\$100,00.

A maioria dos clientes são executivos, insensíveis a desconto na tarifa. Então, para vender todos os seus assentos, a companhia bloqueia assentos para uma agência de turismo.

A agência de turismo compra qualquer quantidade de assentos com antecedência de uma semana, com desconto de R\$150,00 sobre a tarifa plena.

A companhia tem os seguintes dados históricos da demanda referente a tarifa plena.

demanda	prob	prob acum	demanda	prob	prob acum
0	0,06	0,06	6	0,10	0,85
1	0,09	0,15	7	0,06	0,91
2	0,10	0,25	8	0,05	0,9
3	0,15	0,40	9	0,03	0,99
4	0,20	0,60	10	0,01	1,00
5	0,15	0,75			

A menos de uma semana de um voo, quantos assentos devem ser reservados a executivos com tarifa plena?

Solução

- Custo de sobrar assentos à tarifa plena

$$c_s = 500 - 150 - 100 = 250.$$

- Custo de faltar assentos à tarifa plena

$$c_f = 500 - 100 = 400.$$

- $F(Q) > c_f / (c_f + c_s) = 400 / 650 = 0,61$
- Consultando a tabela, observamos que $F(Q^*) = 0,75$ é o menor valor de $F(Q)$ que satisfaz a desigualdade. Portanto, $Q^* = 5$ assentos devem ser reservados aos executivos e os 5 restantes ser vendidos à agência de turismo.

Modelo para o caso contínuo

Uma formulação contínua para o problema do jornaleiro pode ser desejável quando o item considerado tem medida contínua ou quando uma aproximação contínua é conveniente, uma vez que é mais fácil manipular distribuições de probabilidade contínuas do que as suas correspondentes discretas.

Problema: Queremos determinar a quantidade a ser encomendada de um item para um período particular com demanda incerta, de modo a minimizar o custo total, considerando que a demanda pelo item é representada por uma variável aleatória contínua.

X como variável contínua

- 1 Seu espaço amostral Ω é infinito.
- 2 A função de distribuição de probabilidade acumulada de X é definida para $x \in \Omega$ por

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(x)dx,$$

onde $f(\cdot)$ é a função densidade de probabilidade de X , com valores nulos para valores negativos de x .

- 3 Seu valor esperado é dado por

$$E[X] = \int_{x \in \Omega} xf(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx.$$

Para montar o modelo de custo total esperado voltamos ao modelo determinístico do custo total, dado por

$$C(Q) = \begin{cases} c_s(Q - x), & x \leq Q \\ c_f(x - Q), & x \geq Q \end{cases}.$$

Então, o modelo de custo total esperado no caso contínuo é dado por

$$E[C(Q)] = \int_{-\infty}^Q c_s(Q - x)f(x)dx + \int_Q^{+\infty} c_f(x - Q)f(x)dx.$$

Desenvolvendo o custo total esperado, obtemos:

$$\begin{aligned} E[C(Q)] &= \int_{-\infty}^Q c_s(Q-x)f(x)dx + \int_Q^{+\infty} c_f(x-Q)f(x)dx \\ &= c_s \int_{-\infty}^Q (Q-x)f(x)dx + c_f \int_Q^{+\infty} (x-Q)f(x)dx \\ &= c_s Q \int_{-\infty}^Q f(x)dx - c_s \int_{-\infty}^Q xf(x)dx + \\ &\quad c_f \int_Q^{+\infty} xf(x)dx - c_f Q \int_Q^{+\infty} f(x)dx \\ &= c_s Q F(Q) - c_s \int_{-\infty}^Q xf(x)dx \\ &\quad + c_f \int_Q^{+\infty} xf(x)dx - c_f Q(1 - F(Q)). \end{aligned}$$

Logo, para obter a quantidade ótima a ser encomendada do item, podemos derivar o custo total esperado.

Para isso, lembre que

- $F(x) = \int_{-\infty}^x f(x)dx \Rightarrow F'(x) = f(x),$
- $F(x) = \int_{g(x)}^{h(x)} f(x)dx \Rightarrow F'(x) = h'(x)f(h(x)) - g'(x)f(g(x)).$

$$\begin{aligned}\frac{dE[C(Q)]}{dQ} &= c_s F(Q) + c_s Q f(Q) - c_s Q f(Q) \\ &\quad - c_f Q f(Q) - c_f (1 - F(Q)) + c_f Q f(Q) \\ &= c_s F(Q) - c_f (1 - F(Q)) \\ &= (c_s + c_f) F(Q) - c_f.\end{aligned}$$

Portanto, o valor ótimo Q^* deve satisfazer:

$$\frac{dE[C(Q^*)]}{dQ} = 0 \Leftrightarrow F(Q^*) = \frac{c_f}{c_s + c_f}.$$

Pode-se verificar facilmente que a segunda derivada de $E[C(Q)]$ é positiva para todo $Q > 0$.

Exemplo numérico 6

Uma empresa quer fazer um contrato de serviço de manutenção do tipo *take-or-pay*, ou seja, ela paga antecipadamente por Q horas de serviço a um preço unitário v .

- Se ela usa menos que Q horas, não terá reembolso;
- porém, se usar mais que Q horas, precisará pagar um preço unitário $\bar{v} > v$.

A demanda pelo serviço tem distribuição normal com média μ e desvio-padrão σ .

Qual o número de horas contratadas que minimiza o custo?

Solução

- Suponha que Q horas sejam contratadas a custo unitário v .
- Para cada hora de serviço que sobra o custo é $c_s = v$.
- Para cada hora de serviço que falta o custo é $c_f = \bar{v}$.
- A condição de otimalidade para a função distribuição normal padronizada é

$$F(z) = \Phi\left(\frac{Q - \mu}{\sigma}\right) = c_f / (c_s + c_f) = \bar{v} / (v + \bar{v}).$$

- Isto é, precisamos encontrar $z^* = (Q^* - \mu)/\sigma$ na tabela da distribuição normal padronizada que corresponde a $F(z^*) = \bar{v} / (v + \bar{v})$.
- Portanto, o valor de Q^* será determinado a partir de z^* .

INTRODUÇÃO A MODELOS DE PLANEJAMENTO DE ESTOQUES E DE PRODUÇÃO

Leonardo Lustosa (PUC-Rio)
Fernanda Raupp (IMPA/LNCC)

Minicurso SBPO

8-9 de agosto de 2018

Problema de planejamento da produção

Pense na produção de algum bem ou serviço. Seu planejamento deve considerar os seguintes aspectos básicos:

- produto em si,
- escala de produção,
- tipo de processo,
- mercado alvo.

Sobretudo, o planejamento da produção é guiado pelo tipo de demanda:

- se existe demanda, a produção é "sob pedido",
- se a demanda é criada, a produção é "para estoque".

Aqui, iremos estudar o planejamento da produção para estoque, ou seja, vamos tratar das decisões de encomendar (para produzir ou comprar) e de estocar itens numa fábrica.

Pense, por exemplo, no planejamento da produção de telefones celulares inteligentes ou geladeiras.

Vamos supor por hipótese que

- a capacidade de produção é fixa e conhecida (competências e recursos de produção já foram providenciados com antecedência e estão prontos para uso),
- a demanda prevista para o horizonte de planejamento é conhecida (a previsão da demanda já foi realizada).

As técnicas ou métodos usados para encontrar um plano de produção podem ser intuitivos ou científicos.

- Largamente utilizadas, as técnicas intuitivas contam com a ajuda da experiência dos planejadores e de ferramentas, tal como, planilhas eletrônicas, tabelas e gráficos. São capazes de gerar planos de produção viáveis, quando bem sucedidos.
- Já as técnicas científicas fazem uso de resultados teóricos da Programação Matemática ou Otimização para gerar um plano de produção ótimo sob algum ponto de vista, quando possível. Sua grande vantagem é explorar o problema de planejamento da produção por meio de análises "que tal se", através de seu modelo.

Neste curso, iremos focar *principalmente* em modelos básicos de problemas de planejamento de sistemas produtivos.

A construção de um modelo de planejamento deve anteceder, em geral, a aplicação de um método de solução. Na ordem crescente de complexidade, iremos ver:

- Modelo multi-item em único período
- Modelo de um item sem limitação de capacidade de produção e multi-período
- Modelo de um item com capacidade limitada de produção e multi-período
- Modelo multi-item multi-período sem limitação de capacidade de produção
- Modelo multi-item multi-período com limitação de capacidade de produção

Modelo multi-item em único período

Problema: Determinar a quantidade a produzir de cada item num único período.

Esse problema é conhecido como “determinação do mix de produção”

Para chegar ao modelo geral vamos começar apresentando um exemplo simples e específico.

Exemplo numérico 7

Uma marcenaria produz mesas e cadeiras.

Preço unitário de venda

- mesa: R\$1000,
- cadeira: R\$400.

Dois recursos de produção principais

- mesa: 4h de mão-de-obra e 6unid de madeira,
- cadeira: 7h de mão-de-obra e 3unid de madeira.

Disponibilidade dos recursos

- 42h mão-de-obra,
- 50unid madeira.

Sabe-se que tudo que é produzido é vendido. Deseja-se encontrar um plano de produção que maximize a receita da marcenaria.

Modelagem do problema de planejamento da produção da marcenaria

Conjuntos e índices

- I , $i \in I$ conjunto de itens (mesa e cadeira) a serem produzidos, $|I| = n = 2$
- J , $j \in J$ conjunto de recursos de produção (mão-de-obra e madeira), $|J| = m = 2$.

Parâmetros

- $c_1 = 1000$ preço unitário da mesa
- $c_2 = 400$ preço unitário da cadeira
- $a_{11} = 4$ h de mão-de-obra necessárias para produzir 1 mesa
- $a_{12} = 7$ h de mão-de-obra necessárias para produzir 1 cadeira
- $a_{21} = 6$ unid de madeira necessárias para produzir 1 mesa
- $a_{22} = 3$ unid de madeira necessárias para produzir 1 cadeira
- $b_1 = 42$ disponibilidade de mão-de-obra em horas
- $b_2 = 50$ disponibilidade de madeira em unidades.

Variáveis de decisão

- x_1 quantidade a ser produzida de mesas
- x_2 quantidade a ser produzida de cadeiras

Restrições

- As disponibilidades dos recursos devem ser consideradas como limitantes no uso desses recursos.
- As quantidades de mesas e cadeiras a serem produzidas não podem ser negativas: $x_1 \geq 0$ e $x_2 \geq 0$.

Objetivo

- Maximizar a receita: $z(x_1, x_2) = 1000x_1 + 400x_2$.

Modelo matemático resultante

$$\begin{aligned} \text{maximizar} \quad & z = 1000x_1 + 400x_2 \\ \text{sujeito a} \quad & 4x_1 + 7x_2 \leq 42 \\ & 6x_1 + 3x_2 \leq 50 \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{aligned}$$

Como esse problema apresenta somente 2 variáveis de decisão, podemos usar o método gráfico para resolvê-lo e verificar que a sua solução não é adequada para a marcenaria, ou seja, verificar que o seu modelo não está adequado.

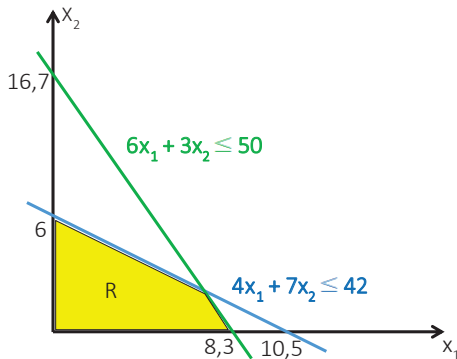
Vamos começar pela determinação do conjunto das soluções viáveis do problema, chamado de região viável:

$$R = \{(x_1, x_2) \in R^2 : 4x_1 + 7x_2 \leq 42, 6x_1 + 3x_2 \leq 50, x_1 \geq 0, x_2 \geq 0\}.$$

Verificamos que

- cada restrição de desigualdade define um semi-espço no R^2 ,
- o conjunto viável satisfaz simultaneamente todas as desigualdades,
- um ponto ótimo é um ponto da região viável R que dá o maior valor à função objetivo, no caso de maximização.

Conjunto de soluções viáveis de produção de mesas e cadeiras da marcenaria



Determinação de uma solução ótima

Precisamos primeiramente definir a direção de máxima subida da função objetivo

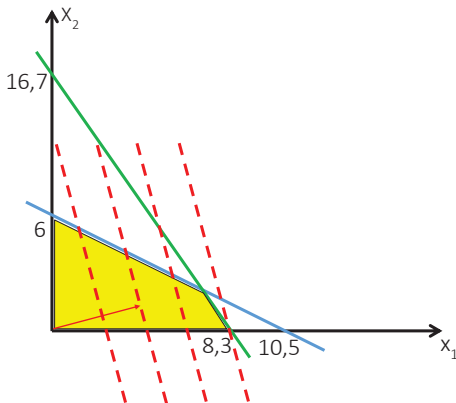
$$z(x_1, x_2) = 1000x_1 + 400x_2.$$

Para isso, determinamos o seu gradiente

$$\nabla z(x_1, x_2) = \left(\frac{\partial z(x_1, x_2)}{\partial x_1}, \frac{\partial z(x_1, x_2)}{\partial x_2} \right) = (1000, 400).$$

Note que o gradiente é constante para qualquer ponto do domínio de uma função afim linear, em particular z .

Ajustando à escala, posicionamos um vetor proporcional ao vetor gradiente e introduzimos as curvas de nível da função objetivo z (retas paralelas e ortogonais ao gradiente).



Seguindo a direção de máxima subida de z , encontramos o ponto de máximo na fronteira da região viável R : $(8.3, 0)$, ou seja, o plano ótimo correspondente ao modelo construído para marcenaria é dado com a produção de 8.3 mesas e 0 cadeiras.

Porém, tal solução não está boa para a marcenaria, pois costumeiramente vende-se uma mesa com quatro cadeiras!

Introduzindo a nova condição à nova formulação do problema, obtemos:

$$\text{maximizar } z = 1000x_1 + 400x_2$$

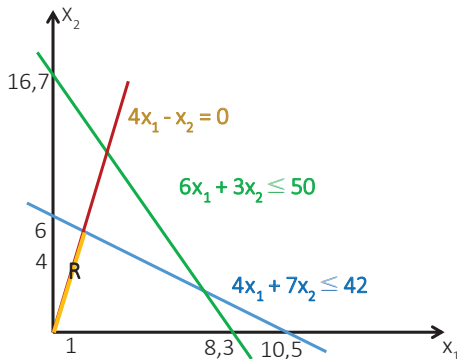
$$\text{sujeito a } 4x_1 + 7x_2 \leq 42$$

$$6x_1 + 3x_2 \leq 50$$

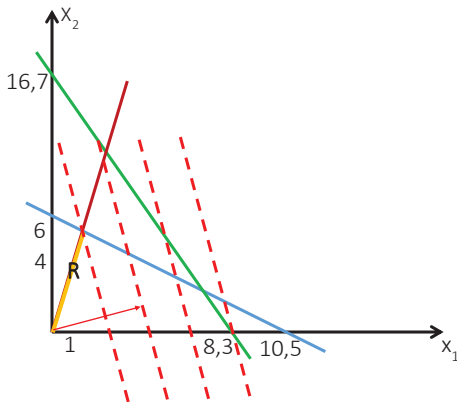
$$4x_1 - x_2 = 0$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

Com isso, tem-se uma nova região viável, dada por segmento de reta R .



Como z e suas curvas de nível não foram alterados, usamos o mesmo procedimento para encontrar a nova solução ótima na fronteira de R , dada pelo ponto $(1.3, 5.2)$.



A solução ótima é real!

Um problema de programação linear, como o exemplo de problema de planejamento da produção que vimos, pode ser escrito no formato padrão como

$$\begin{array}{ll}\text{minimizar} & c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n \\ \text{sujeito a} & a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ & a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ & \vdots \\ & a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \dots, x_n \geq 0\end{array}$$

ou resumidamente na forma matricial como

$$\begin{array}{ll}\text{minimizar} & c^T x \\ \text{sujeito a} & Ax = b \\ & x \geq 0,\end{array}$$

em que são conhecidos A , b e c .

- Cada coeficiente da matriz A representa a quantidade de um recurso necessária à produção de uma unidade de um item,
- os coeficientes do vetor b representam as quantidades disponíveis dos recursos de produção,
- os coeficientes do vetor c representam os custos unitários dos itens.

Problemas de programação linear

- com variáveis reais são fáceis de serem resolvidos. A exigência de variáveis inteiras pode dificultar bastante a resolução do modelo. Nem pense em arredondar soluções reais em soluções inteiras, pois na maioria dos casos isso não dá certo.
- Podem ser resolvidos, quando possível, pelo método simplex ou por um método de pontos interiores.
- Revelam importantes aspectos de problemas de planejamento da produção, entre eles o "preço sombra".

Modelo de um item sem limitação de capacidade e multi-período

Queremos determinar quando e quanto produzir e estocar de um item ao longo de um horizonte de planejamento, dado por um número finito de períodos futuros, de modo a satisfazer a demanda prevista e minimizar custos.

Considera-se ainda que

- existe preparação para produção de novos lotes de produção;
- a capacidade de produção é suficientemente grande para atender qualquer quantidade que se decida produzir;
- por simplicidade, os estoques são nulos no início e no fim do horizonte de planejamento;
- a demanda não pode ser negativa.

Modelagem

Conjunto e índice

- $T = \{1, 2, \dots, n\}$, $t \in T$, o horizonte de planejamento T é composto por n períodos de tempo
- Um período em T é denotado por t

Parâmetros

- p_t custo unitário de produção associado ao período t (\$)
- q_t custo fixo de preparação para produção associado ao período t (\$)
- h_t custo de manter estoque por unidade do item associado ao período t (\$)
- d_t demanda prevista pelo item para o período t (unidades)
- M_t número inteiro positivo suficientemente grande

Variáveis de decisão

- x_t quantidade do item a ser produzida no período t (unidades)
- y_t indica se existe produção do item no período t ($y_t = 1$) ou não ($y_t = 0$)
- s_t quantidade do item a ser estocada ao final do período t (unidades.)

Restrições

- A demanda prevista a cada período deve ser satisfeita
- Estoques no início e no fim do horizonte de planejamento são nulos
- As quantidades produzidas e estocadas devem ser não negativas

Objetivo

- minimizar custos de produzir, preparar para produção e manter estoque

Modelo matemático resultante

$$\begin{aligned} &\text{minimizar} && \sum_{t=1}^n p_t x_t + q_t y_t + h_t s_t \\ &\text{sujeito a} && s_{t-1} + x_t = d_t + s_t \quad \forall t \\ &&& s_0 = s_n = 0 \\ &&& x_t \leq M_t y_t \quad \forall t \\ &&& x_t \geq 0, s_t \geq 0 \quad \forall t \\ &&& y_t \in \{0, 1\} \quad \forall t. \end{aligned}$$

M_t pode ser definido simplesmente como $\sum_t d_t$, pois $s_n = 0$.

Esse modelo se refere a de um problema de programação linear inteira mista.

Exemplo numérico 8

Considere o problema de dimensionamento de lotes de um item sem limitação da capacidade de produção. Uma instância do problema é caracterizada por:

- horizonte de planejamento: 3 períodos mensais,
- demanda pelo item em unidades: (90,110,100),
- custo unitário de produção por período: 5\$,
- custo de preparação: (30\$, 20\$, 10\$),
- custo unitário de estocar por período: 2\$.

Monte o modelo matemático da instância e avalie o número de variáveis de decisão e restrições funcionais.

Solução

Tomando $M_t = \sum_{k=t}^3 d_k$, temos que

minimizar $5x_1 + 5x_2 + 5x_3 + 30y_1 + 20y_2 + 10y_3 + 2s_1 + 2s_2 + 2s_3$

sujeito a

$$s_0 + x_1 = 90 + s_1$$

$$s_1 + x_2 = 110 + s_2$$

$$s_2 + x_3 = 100 + s_3$$

$$s_0 = 0, \quad s_3 = 0$$

$$x_1 \leq 300y_1$$

$$x_2 \leq 210y_2$$

$$x_3 \leq 100y_3$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0, \quad s_1, s_2, s_3 \geq 0$$

$$y_1, y_2, y_3 \in \{0, 1\}.$$

O problema tem 9 variáveis de decisão e 8 restrições funcionais.

<https://proceedings.science/p/860212lang=pt-br>

Modelo de um item com capacidade limitada e multi-período

Queremos resolver o problema de dimensionamento de lotes de produção de um item ao longo de um horizonte de planejamento, considerando ainda que

- a capacidade de produção seja limitada por período.
- quando num período existir preparação para produção, existe impossibilidade de produzir, além do custo associado da preparação.

Modelagem

Conjunto e índice

- $T = \{1, 2, \dots, n\}$, $t \in T$

Parâmetros

- p_t custo unitário de produção associado ao período t (\$)
- q_t custo fixo de preparação para produção associado ao período t (\$)
- h_t custo de manter estoque por unidade do item associado ao período t (\$)
- d_t demanda prevista pelo item para o período t (unidades)
- M_t número inteiro positivo suficientemente grande
- α_t tempo necessário para produzir uma unidade do item no período t
- β_t tempo de preparação para a produção no período t
- C_t capacidade de produção associada ao período t em termos do tempo em que os recursos de produção estão disponíveis

Variáveis

- x_t quantidade do item a ser produzida no período t (unidades)
- y_t indica se existe produção do item no período t ($y_t = 1$) ou não ($y_t = 0$)
- s_t quantidade do item a ser estocada ao final do período t

Restrições

- A demanda prevista deve ser satisfeita a cada período
- Estoques são nulos no início e fim do horizonte de planejamento
- Existe capacidade de produção limitada a cada período
- Quantidades produzidas e estocadas não podem ser negativas

Objetivo

- Minimizar custos de produção, preparação e de estocar.

Modelo matemático resultante

$$\begin{aligned}
 &\text{minimizar} && \sum_{t=1}^n p_t x_t + q_t y_t + h_t s_t \\
 &\text{sujeito a} && s_{t-1} + x_t = d_t + s_t \quad \forall t \\
 &&& s_0 = s_n = 0 \\
 &&& x_t \leq M_t y_t \quad \forall t \\
 &&& \alpha_t x_t + \beta_t y_t \leq C_t \quad \forall t \\
 &&& x_t \geq 0, s_t \geq 0 \quad \forall t \\
 &&& y_t \in \{0, 1\} \quad \forall t
 \end{aligned}$$

Modelo multi-item multi-período sem limitação de capacidade

Queremos determinar um plano de produção para um sistema de produção de vários itens de forma não simultânea ao longo de um horizonte de planejamento. Considera-se

- estoques nulos no início e no fim do horizonte de planejamento,
- capacidade de produção ilimitada para todos os itens em todos os períodos.

Numa fábrica, é comum o compartilhamento de recursos de produção por uma família de itens.

Modelagem

Conjuntos e índices

- $T = \{1, 2, \dots, n\}$, $t \in T$, conjunto de períodos do horizonte de planejamento
- $I = \{1, 2, \dots, m\}$, $i \in I$, conjunto de itens (distintos) a serem produzidos

Parâmetros

- p_{it} custo unitário de produção do item i associado ao período t (\$)
- q_{it} custo de preparação para a produção do item i associado ao período t (\$)
- h_{it} custo de manter estoque por unidade do item i associado ao período t (\$)
- d_{it} demanda pelo item i prevista para o período t (unidades)
- M_{it} número inteiro positivo suficientemente grande para não limitar a produção do item i no período t

Variáveis de decisão

- x_{it} unidades do item i a serem produzidas no período t ,
- y_{it} indica se existe produção do item i no período t ($y_{it} = 1$) ou não ($y_{it} = 0$),
- s_{it} unidades do item i a serem estocadas ao final do período t .

Restrições

- A cada período a demanda prevista deve ser satisfeita.
- Estoques são nulos no início e no fim do horizonte de planejamento.
- As quantidades produzidas e estocadas devem ser não negativas.

Objetivo

- Minimizar custos de produzir, preparar produção e manter estoque.

Modelo matemático resultante

$$\begin{aligned}
 &\text{minimizar} && \sum_{t=1}^n \sum_{i=1}^m p_{it}x_{it} + q_{it}y_{it} + h_{it}s_{it} \\
 &\text{sujeito a} && s_{i,t-1} + x_{it} = d_{it} + s_{it} \quad \forall i, \forall t \\
 &&& s_{i0} = s_{in} = 0 \quad \forall i \\
 &&& x_{it} \leq M_{it}y_{it} \quad \forall i, \forall t \\
 &&& x_{it} \geq 0, s_{it} \geq 0 \quad \forall i, \forall t \\
 &&& y_{it} \in \{0, 1\} \quad \forall i, \forall t.
 \end{aligned}$$

Observe que este problema tem um único objetivo, $3mn$ variáveis de decisão e $2m(n+1)$ restrições funcionais. Mesmo para instâncias de tamanho pequeno, esse problema deve ser resolvido com auxílio de computador.

Modelo multi-item multi-período com limitação de capacidade

Queremos determinar as quantidades a serem produzidas de itens acabados, de modo a

- satisfazer a demanda prevista ao longo de um horizonte de planejamento,
- minimizar os custos de produzir e manter estoque,

sabendo que existe limitação de capacidade em termos de tempo disponível para produção.

Esse problema é conhecido como problema mestre de programação de produção (master production scheduling problem).

Conjuntos e índices

- I conjunto dos itens acabados a serem produzidos ($i \in I$)
- T conjunto dos períodos de tempo ($t \in T$)

Parâmetros

- d_{it} demanda pelo item acabado i no período t (unidades do item)
- h_i custo unitário de estocar o item i por período (\$)
- p_i custo unitário de produção do item i (\$)
- q_i custo fixo de produção do item i (custo de preparação para produção) (\$)
- α_i tempo necessário para produzir uma unidade do item i (hora)
- C_t tempo de produção disponível por período (hora)
- M_{it} número inteiro positivo suficientemente grande para não limitar a produção do item i no período t

Variáveis de decisão

- x_{it} quantidade do item i a ser produzida no período t
- y_{it} indica se existe produção do item i no período t ($y_{it} = 1$) ou não ($y_{it} = 0$)
- s_{it} quantidade do item i a ser estocada ao final do período t

Restrições

- Satisfação da demanda a cada período
- Limitação de capacidade em termos de tempo disponível para a produção
- Não negatividade das quantidades dos itens a serem produzidos e estocados

Objetivo

- Minimizar os custos de produção, preparação da produção e de manter estoque

Modelo matemático resultante

$$\begin{aligned}
&\text{minimizar} && \sum_{i=1}^m \sum_{t=1}^n p_i x_{it} + q_i y_{it} + h_i s_{it} \\
&\text{sujeito a} && s_{i,t-1} + x_{it} = d_{it} + s_{it} \quad \forall i, \forall t \\
&&& s_{i0} = s_{in} = 0 \quad \forall i \\
&&& x_{it} \leq M_{it} y_{it} \quad \forall i, \forall t \\
&&& \sum_{i=1}^m \alpha_i x_{it} \leq C_t \quad \forall t \\
&&& x_{it} \geq 0, s_{it} \geq 0 \quad \forall i, \forall t \\
&&& y_{it} \in \{0, 1\} \quad \forall i, \forall t.
\end{aligned}$$

Exemplo numérico 9

Para os valores conhecidos dos parâmetros e de uma solução viável, calcule o valor do custo total relativo.

d_{it}	t=1	t=2	t=3	t=4	h_i	q_i	α_i	p_i
i=1	30	25	25	20	25	900	1	1
i=2	10	20	15	20	10	850	1	1
C_t	100	100	100	100				

x_{it}	t=1	t=2	t=3	t=4	s_{it}	t=1	t=2	t=3	t=4
i=1	55	0	45	0	i=1	25	0	20	0
i=2	45	0	0	20	i=2	35	15	0	0

Lembre que o valor de y_{it} pode ser deduzido a partir do valor de x_{it} .

Solução

O valor do custo total é calculado avaliando

$$\begin{aligned}
 C_T &= \sum_{i=1}^2 \sum_{t=1}^4 p_i x_{it} + q_i y_{it} + h_i s_{it} \\
 &= p_1 x_{11} + q_1 y_{11} + h_1 s_{11} + p_1 x_{13} + q_1 y_{13} + h_1 s_{13} + \\
 &\quad p_2 x_{21} + q_2 y_{21} + h_2 s_{21} + h_2 s_{22} + p_2 x_{24} + q_2 y_{24} \\
 &= 55 + 900 + 625 + 45 + 900 + 500 + 45 + 850 + 350 + 150 \\
 &\quad + 20 + 850 = 5290.
 \end{aligned}$$

Temos que $C_T = 5290$ é um limitante superior para o custo total ótimo.

Considerações finais

- Vimos como modelar o planejamento da produção de itens acabados de sistemas de produção simples.
- Existem modelos que consideram todos os níveis do sistema de produção abordado, considerando o planejamento de aquisição de insumos, produção de itens semiacabados e finalmente a montagem de itens acabados.
- Outros modelos já têm incorporados a remanufatura de insumos na produção de itens.

Considerações finais

- Modelar um problema de planejamento da produção da prática é um desafio que exige idas-e-vindas até que se considere *apenas tudo* que é necessário para alcançar o seu propósito.
- Na prática, também lidamos com instâncias bem grandes que exigem a introdução de pré-processamentos.
- Quanto mais próximos à realidade, mais incertezas devem ser consideradas no problema de planejamento, exigindo a introdução de técnicas de otimização apropriadas.