ANÁLISE DE SENSIBILIDADE PARA A COMPOSIÇÃO PROBABILÍSTICA DE PREFERÊNCIAS COM INTEGRAIS DE CHOQUET NO APOIO À DECISÃO MULTICRITÉRIO

Luiz Octávio Gavião
Escola Superior de Guerra (ESG)
Fortaleza de São João - Av. João Luiz Alves, s/nº - Urca – Rio de Janeiro-RJ - CEP: 22291-090
E-mail: luiz.gaviao67@gmail.com

Annibal Parracho Sant'Anna
Universidade Federal Fluminense (UFF)
Rua Passo da Pátria, 156, Bloco D, São Domingos, Niterói-RJ, CEP: 24.220-240
E-mail: annibal.parracho@gmail.com

Gilson Brito Alves Lima
Universidade Federal Fluminense (UFF)
Rua Passo da Pátria, 156, Bloco D, São Domingos, Niterói-RJ, CEP: 24.220-240
E-mail: glima@id.uff.br

Pauli Adriano de Almada Garcia
Universidade Federal Fluminense (UFF)
Rua Des. Ellis Hermydio Figueira, 783 - Aterrado, Volta Redonda - RJ, CEP: 27213-145
E-mail: pauliadriano@gmail.com

RESUMO

Este artigo apresenta uma proposta de análise de sensibilidade à Composição Probabilística de Preferências (CPP) com integrais de Choquet. O método CPP-Choquet se destina à ordenação de alternativas em problemas de apoio à decisão multicritério, com base na interação probabilística de critérios. Esta pesquisa reavaliou os resultados obtidos por método similar, para uma base de dados composta por notas de 89 alunos (alternativas), em cinco disciplinas (critérios). A simulação de diversas interações entre os critérios permitiu avaliar o comportamento das alternativas em amplo espectro, indicando inversões de ordem das alternativas com melhor desempenho. A análise de sensibilidade do método pesquisado é original na literatura e relevante para adicionar novas perspectivas à avaliação do problema.

PALAVRAS CHAVE. CPP. Choquet. Análise de Sensibilidade.
Tópicos MP – Modelos Probabilísticos.

ABSTRACT

This paper presents a proposal of sensitivity analysis to the Composition of Probabilistic Preferences (CPP) with Choquet integrals. The CPP-Choquet method is used to order alternatives in multicriteria decision support problems, based on the probabilistic interaction of criteria. This research re-evaluated the results obtained by a similar method for a database composed of 89 students (alternatives) in five subjects (criteria). The simulation of several interactions between the criteria allowed to evaluate the behavior of the alternatives in a broad spectrum, indicating inversions of order of the alternatives with better performance. The sensitivity analysis of the CPP-Choquet is original in the literature and relevant to add new perspectives to the evaluation of multicriteria problems.

KEYWORDS. **CPP. Choquet. Sensitivity Analysis.**
Paper topics: MP – Probabilistic Methods.

https://proceedings.science/p/85548?lang=pt-br

1. Introdução

Os modelos de apoio à decisão multicritério (*Multiple Criteria Decision Aid* - MCDA) empregam, em geral, cálculos com base no desempenho das alternativas isoladamente em cada critério (Pomerol & Barba-Romero, 2012). Na prática, entretanto, a tomada de decisão pode envolver avaliações decorrentes de interações dos critérios. Isto requer uma modelagem não-aditiva, de modo a levar em consideração o desempenho das alternativas diante de diversas combinações de critérios. Nesse contexto, a teoria das capacidades de [Choquet 1953] foi adaptada com sucesso em problemas MCDA, com ampla variedade de aplicações [Grabisch e Labreuche 2010], [Grabisch e Roubens 2000], [Merad etal. 2013]. Sob o ponto de vista MCDA, uma "capacidade" pode ser interpretada como pesos atribuídos aos subconjuntos de critérios do problema, sendo agregados por integrais de Choquet para a obtenção de um escore final de cada alternativa, que indica uma ordem de preferências para a tomada de decisão [Grabisch et al. 2006].

A Composição Probabilística de Preferências (CPP) é um método MCDA que também pode explorar as integrais de Choquet. Em [Sant'Anna 2014a, 2014b, 2015a, 2015b], o CPP-Choquet foi utilizado para reavaliar a classificação de países, com base no Índice de Desenvolvimento Humano (IDH). Em [Souza et al. 2016], as integrais de Choquet foram utilizadas com o CPP para a avaliação de processos em gestão de resíduos, utilizando os índices de Shapley para a redução sucessiva de critérios. As capacidades também são necessárias aos cálculos dos índices de Shapley para cada critério, indicando sua importância relativa no processo de tomada de decisão, com a base de dados utilizada [Shapley 1953]. Em [Sant'Anna 2015a], o cálculo probabilístico das capacidades e suas composições por integrais de Choquet, para determinar a ordem de preferência de cada alternativa, estão detalhados.

O CPP-Choquet usa o cálculo da probabilidade de união dos critérios para definir as capacidades dos subconjuntos que eles formam. Dessa forma, os escores de probabilidade refletem a interação entre os critérios. Esse cálculo probabilístico se aplica tanto a pares de critérios quanto a maior quantidade de interações. Conforme [Šipošová et al. 2017], as interações dos critérios podem produzir estados de super e subaditividade, indicando situações de sinergia e redundância, respectivamente, para a solução do problema. Assim, a variedade de resultados revela o comportamento das preferências para maior espectro de interações, sendo então possível avaliar a sensibilidade da ordenação das alternativas.

Este artigo tem por finalidade apresentar uma análise de sensibilidade do CPP-Choquet aplicado a um problema MCDA. A proposta é inédita à literatura do CPP e se mostra relevante ao processo de tomada de decisão, ao indicar o comportamento da ordem de preferência das alternativas, antes indicadas em somente um estado de interação. Para atender à finalidade, o artigo está estruturado em seis Seções. Após a seção introdutória, a Seção 2 resume o método CPP. A Seção 3 descreve as etapas de cálculo do CPP-Choquet. A Seção 4 destaca a proposta de análise de sensibilidade do CPP-Choquet. A Seção 5 reavalia o problema apresentado por [Kojadinovic 2008], à luz do CPP-Choquet. Por fim, a Seção 6 traz as considerações finais desta pesquisa. Os cálculos foram efetuados no software "R", com auxílio do aplicativo "kappalab" [R-Core-Team 2016].

2. O método CPP

O CPP é um método MCDA. O CPP aplica a abordagem probabilística ao problema de tomada de decisão, a partir do conceito-chave da "aleatorização" das alternativas. Esse conceito deriva da imprecisão das medidas, da natureza aleatória do problema ou mesmo da incerteza acerca do contexto que envolve a tomada de decisão. Caso esses elementos não estivessem presentes, outros métodos determinísticos poderiam ser aplicados ao problema com soluções satisfatórias. Porém, o tratamento probabilístico de um problema sob tais condições confere maior realismo à modelagem [Sant'Anna 2015a].

Nesse primeiro passo do CPP, as avaliações exatas das alternativas são interpretadas como medidas de posição (i.e. média, moda, mediana) de uma variável aleatória. Essa transformação

https://proceedings.science/p/85548?lang=pt-br

permite o tratamento estatístico das avaliações por funções de probabilidade. A escolha da função probabilística que melhor se ajusta aos dados pode advir de informações *a priori*, de aplicações bem-sucedidas a problemas similares, do ajuste dos dados a distribuições conhecidas por técnicas estatísticas, denominado "*goodness-of-fit*" ou, na ausência dessas informações, arbitrada ao contexto do problema. De maneira geral, o uso de distribuições normais e triangulares têm suprido as necessidades da modelagem simétrica e assimétrica dos dados, respectivamente, com resultados satisfatórios. Nesta pesquisa são utilizadas distribuições Beta modificadas, também denominadas distribuições PERT, por referência ao modelo homônimo de análise de riscos em projetos. As distribuições PERT são parametrizadas a partir dos valores mínimos, modais e máximos de cada alternativa. O ajuste dos parâmetros das distribuições foi efetuado com auxílio do aplicativo "mc2d" do software "R" [R-Core-Team 2016].

$$M_{ij} = \int_{D_{X_i}} \left[\prod F_{X_{-i}}(x_{-i}) \right] f_{X_i}(x_i) dx_i \tag{1}$$

$$m_{ij} = \int_{D_{X_i}} \left[\prod \left(1 - F_{X_{-i}}(x_{-i})\right) \right] f_{X_i}(x_i) dx_i \tag{2}$$

Após o processo de "aleatorização", as probabilidades da i-ésima alternativa ser superior (M_{ij}) e inferior (m_{ij}) às demais, conjuntamente, são calculadas para cada j-ésimo critério. Nas equações (1) e (2), um vetor aleatório, "X", simboliza as alternativas do problema. As funções relativas à i-ésima alternativa são indexadas por "i" e as demais por "-i". As notações F_X, f_X *e* D_{Xi} são, respectivamente, a função distribuição cumulativa (cdf), a função densidade de probabilidade (pdf) e o domínio da variável aleatória "X" [Sant'Anna et al. 2012].

As probabilidades "M_{ij}*"* e "m_{ij}*"* precisam ser compostas para a obtenção do escore final, que conclui o método CPP. Com base nos escores finais, as alternativas são selecionadas para a escolha, agrupadas para a classificação, entre outras opções para a tomada de decisão. Em [Sant'Anna 2015a], são apresentadas diferentes formas de composição dessas probabilidades. Nesta pesquisa é utilizada a composição por capacidades e integrais de Choquet, que inclui na modelagem as avaliações resultantes das interações dos critérios.

3. O CPP-Choquet

A expressão "CPP-Choquet" é aqui utilizada para denominar o uso do CPP na composição por capacidades e integrais de Choquet, para a ordenação de alternativas em problemas MCDA. O CPP-Choquet é calculado em cinco etapas: (1) coleta dos dados, (2) cálculo das probabilidades de maximizar as avaliações originais, (3) cálculo das capacidades dos subconjuntos de critérios, (4) composição das integrais de Choquet para as alternativas e (5) cálculo dos índices de Shapley dos critérios.

Na etapa inicial, a coleta de dados é efetuada, de modo a configurar a matriz de decisão do problema MCDA. Os elementos dessa matriz são constituídos por avaliações das alternativas ao problema a ser solucionado, para cada critério de interesse à tomada de decisão. De maneira geral, convenciona-se que as linhas da matriz são destinadas às alternativas, as colunas aos critérios e os elementos internos às avaliações de cada alternativa em cada critério. Os cálculos do CPP não requerem a padronização das escalas de avaliação.

Na Etapa 2, são calculadas as probabilidades de cada avaliação ser superior ao conjunto das demais, em cada critério. Esses cálculos são efetuados a partir da Equação (1). Dependendo do contexto da tomada de decisão, também é possível prosseguir nas demais etapas com os cálculos das probabilidades de cada avaliação ser a menor, em cada critério, conforme a Equação (2).

Na Etapa 3, das probabilidades dos conjuntos de alternativas são derivadas capacidades para os conjuntos de critérios. Para um conjunto N de n critérios, devem ser calculadas as capacidades μ para 2^n subconjuntos de critérios. As capacidades pertencem ao intervalo [0,1] e

https://proceedings.science/p/85548?lang=pt-br

devem satisfazer as condições: $\mu(\{\emptyset\})=0$, $\mu(\{N\})=1$ e, para quaisquer subconjuntos E e F $\subset$ N, se E $\subset$ F, então $\mu(E) \leq \mu(F)$. Essa etapa envolve três passos. Inicialmente, para cada S, subconjunto de N com *s* critérios, S = {C_1, .., C_s}, são calculadas as probabilidades conjuntas de maximizar as preferências em ao menos um critério do subconjunto, usando a Equação (3), em que, para cada *i*, P_{ai} denota a avaliação da alternativa *a* pelo critério C_i. Esse cálculo representa um escore do ponto de vista progressista-otimista do CPP, para avaliações independentes [Sant'Anna 2015a, p. 42].

$$P(\{C_1, \ldots, C_s\}) = 1-[(1-P_{a1}).(1-P_{a2}) \ldots (1-P_{as})] \quad (3)$$

Em seguida, ainda na Etapa 3, são selecionados os valores máximos das probabilidades de cada subconjunto, entre os resultados da aplicação da Equação (3) para as alternativas, conforme a Equação (4). Esses valores máximos são, por fim, padronizados, tornando-os proporções do de maior valor, indicado por U, conforme a Equação (5). Os resultados são associados a capacidades $\mu(S)$ dos subconjuntos dos critérios, sendo então utilizadas aos cálculos subsequentes.

$$U = Max\{C_1, \ldots, C_s\} = \max_a\{1-[(1-P_{a1}).(1-P_{a2}) \ldots (1-P_{as})]\} \quad (4)$$

$$\mu(\{C_1, \ldots, C_s\}) = P(\{C_1, \ldots, C_s\}) / P(U) \quad (5)$$

Na Etapa 4, as avaliações probabilísticas das alternativas são compostas por integrais de Choquet. O maior resultado entre os escores finais define a preferência para a tomada de decisão.

$$CH_\mu(A) = \sum_{j=1}^{n} p_{\tau(j)}(A) - p_{\tau(j-1)}(A)\mu(\{\tau(j), \ldots, \tau(n)\}) \quad (6)$$

O escore final "CH" pode ser obtido a partir da Equação (6). A notação descreve a integral de Choquet da alternativa *A*, em *j* critérios, em relação à capacidade μ em S, considerando ainda que τ é uma permutação de S satisfazendo $p_{\tau(j)}(A) > p_{\tau(j-1)}(A)$ e arbitrando $p_{\tau(0)}(A)=0$. Mais detalhes também podem ser obtidos em [Sant'Anna 2015a, p. 27].

$$SH_\mu(A) = \sum_{(K \subseteq S \setminus A)} [(\#(S \setminus A \setminus K))!(\#(K)))!/ (\#(S \setminus A)+1)!] \sum_{L \subseteq A} (-1)^{\#(A \setminus L)} \mu(K \cup L) \quad (7)$$

Na última etapa, as capacidades são utilizadas com o índice de Shapley, que pode ser associado à importância de cada critério, para a matriz de decisão do problema. A Equação (7) descreve o cálculo do índice de Shapley "$SH_\mu(\{j\})$", para o j-ésimo critério isolado, considerando as capacidades "μ" nos subconjuntos "S". Mais detalhes também podem ser obtidos em [Shapley 1953] e [Sant'Anna 2015a, p. 15].

4. Análise de Sensibilidade do CPP-Choquet

O modelo proposto para a análise de sensibilidade do CPP-Choquet envolve as mesmas etapas descritas na Seção 3, porém com a avaliação de diferentes cenários de interação entre os critérios. Na Etapa 3, são compostas as probabilidades dos subconjuntos S, formados com as combinações de *n* critérios, com 2^n-2 graus de liberdade, já que as capacidades de Ø e N possuem valores zero e um, respectivamente. De fato, o cálculo das probabilidades dos subconjuntos com escores progressistas-otimistas no CPP-Choquet define um estado de interação dos critérios, conforme ilustrado no diagrama de Venn da Fig. 1(b). A proposta, então, é ampliar os cálculos das probabilidades de cada subconjunto, considerando os cenários de interação descritos nas Fig. 1(a) e Fig.1(c), genericamente representados por três critérios "A", "B" e "C". Assim, considerando

https://proceedings.science/p/85548?lang=pt-br

capacidades variando entre esses cenários extremos, se cobre um amplo espectro de interações entre os de critérios.

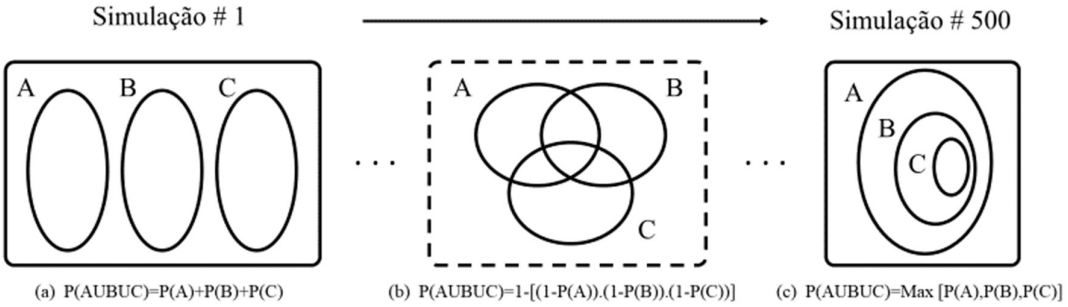


Fig.1- Interações genéricas de três critérios "A", "B" e "C".

A Fig. 1(a) representa uma interação entre os conjuntos de critérios disjuntos "A", "B" e "C" maior que a da Fig. 1(b), enquanto a Fig. 1(c) ilustra uma interação com maior redundância. Nas avaliações efetuadas, verificou-se que as probabilidades resultantes do cenário da Fig. 1(a) foram superiores aos da Fig. 1(b) e estas superiores as da Fig. 1(c), respeitando os axiomas de probabilidade [Ross 2009]. Em relação aos axiomas, cabe destacar que os cálculos dos cenários da Fig. 1(a) não excederam o valor unitário, em função dos baixos valores das probabilidades no problema, tornando inócua a restrição inserida no código de programação. Dessa forma, esses cenários puderam ser usados como extremos para a simulação das capacidades. Por limitação computacional do software R, foram consideradas 500 capacidades igualmente espaçadas entre esses dois extremos. O restante dos procedimentos da Etapa 3 e demais etapas são efetuados para cada valor de probabilidade dos subconjuntos de critérios. Ao final, é possível verificar o comportamento dos valores das integrais de Choquet das alternativas e índices de Shapley dos critérios para o espectro de interações possíveis entre eles, revelando, assim, a sensibilidade da ordenação das alternativas e critérios.

5. Aplicação

Este artigo reavaliou o problema de pesquisa apresentado por [Kojadinovic 2008]. O autor explorou um problema MCDA com auxílio de integrais de Choquet e capacidades geradas por técnicas de entropia. Naquela pesquisa, 89 alunos foram avaliados em cinco disciplinas (i.e. Inglês, Computação, Álgebra, Análise e Física), conforme descreve a Tabela 1. As notas originais pertencem à escala (0,20). O problema de pesquisa está relacionado à ordenação dos Alunos, levando-se em conta os desempenhos isolados e por interação das disciplinas, levando-se conteúdos acadêmicos em comum e que influenciam no desempenho global dos Alunos. Por necessidade de concisão do texto, algumas Tabelas apresentam somente um extrato dos resultados.

Tabela 1 – Notas dos Alunos

Aluno	Ing	Cmp	Alg	Ana	Fis	Aluno	Ing	Cmp	Alg	Ana	Fis	Aluno	Ing	Cmp	Alg	Ana	Fis
1	7,7	14,3	3,9	3,7	9,4	31	9,3	12,5	2,5	3,1	3,1	61	11	11,9	8,1	5,5	6,9
2	11	12	1,1	4,6	4,4	32	16,3	2	12,4	1,2	7,9	62	1	9,5	2,9	4,8	4,7
3	14,3	1,3	4,9	3,6	7,6	33	5,3	9,9	6	3,2	4,3	63	8,7	6,8	4,4	4,9	4,3
4	11,2	9,5	2,2	3,3	3,3	34	13,3	11,9	5,2	5,8	5,2	64	11	6,8	2,2	0,2	1,8
5	6,3	7,3	8,7	6,3	11,5	35	11,3	9,9	9,5	6,9	8,1	65	1	3,6	7,2	5	5,7
6	9,5	5,6	4,4	3,3	4,7	36	12,3	13,2	9,4	6,8	9,1	66	13,3	1	8,8	5,8	7
7	9,7	9,7	1,5	2	1,7	37	15,7	13,7	13,2	1,8	12,9	67	6,3	9,5	5,5	2,8	1,2

https://proceedings.science/p/85548?lang=pt-br

Aluno	Ing	Cmp	Alg	Ana	Fis	Aluno	Ing	Cmp	Alg	Ana	Fis	Aluno	Ing	Cmp	Alg	Ana	Fis
8	9,7	8,9	9,8	7,9	8,4	38	8,5	7,1	6,1	5,6	5,2	68	18,7	12,7	13	6,2	5,5
9	13	1,3	5,4	5,4	7	39	12,5	4,9	6,1	5,7	9,2	69	16,3	11,2	9,4	5,8	5,7
10	6,7	5,6	3,7	4	5	40	12	7,7	5,9	5,7	7	70	9	1,7	4,9	4,7	6,7
11	11,7	6,4	5	6,3	6,4	41	15,7	16,2	14,5	1,1	13,1	71	15,3	8,8	7,3	6,9	9,3
12	14,7	11,4	7	5,9	1,8	42	12	1,2	5,8	6,3	6,5	72	12,3	5,8	5,3	3,3	2,9
13	12,3	6,6	8	6,8	1,4	43	1	8,6	3,6	5,4	7,8	73	7	8,4	8,2	7,2	8,5
14	13,7	9,6	5,3	4,9	8,7	44	16,3	9,9	3,9	5	7,3	74	11,7	13,7	9	6,7	7,6
15	1	7,7	11	7,6	6,8	45	14,7	2	7,3	5,8	9,6	75	15	8,4	5,2	4,1	5,7
16	15,7	2	3,2	3,9	6,3	46	15	14	11,5	8,5	7	76	8	1,7	0,5	3	2,2
17	7	5,9	7,5	4,9	5,1	47	11,3	11,4	5,4	2,8	5,5	77	12	9,5	6,6	7,3	8,8
18	14,7	13,6	11,6	8,6	1,4	48	3	4,5	0,2	3,5	1,7	78	1,7	5,9	5,1	2,5	7,7
19	11,3	4,7	5,2	3,1	2,7	49	11	6,6	5,3	5,7	1,1	79	12,3	12,2	11	9,2	7,9
20	17	17,8	9,3	6,5	7,8	50	9	6,9	0,8	3	4,1	80	11,3	11,6	2,5	1,9	1,4
21	5	1,6	12,2	9,9	6,3	51	14	1,7	1,5	4,1	8,7	81	15,7	8,6	2,8	4,2	3,5
22	7,7	1,6	4,3	5,3	7,5	52	14	1,4	5,3	6,4	8,2	82	1,5	13,8	1,9	1,8	6,9
23	14,3	7,2	9,5	9,9	7,6	53	15,8	11,8	6	5,4	7,5	83	3,3	5,7	1,8	9,2	1,5
24	1,3	13,8	4,5	2,3	12,2	54	9,7	14,9	11,5	5,6	5,9	84	12,7	7,2	3,4	4,5	5,6
25	16,8	6,6	3,8	1,8	7,6	55	16	15,4	14,3	8,5	7,5	85	12,3	14,6	7,6	8,8	6,4
26	11,3	5,4	8,5	6,3	4,4	56	7,7	6,9	1,5	4,3	8,3	86	16	12,4	1,3	10	8,7
27	3,3	16,5	4,8	3,8	3,7	57	15	11,7	12,6	9,6	2	87	13	18,1	8,5	5,9	8
28	5,8	1,3	0,7	1	1,6	58	13,3	8,3	6,4	4,6	5,7	88	7,5	7,8	7,1	7,8	7,6
29	13	13,9	8,2	6,5	8,2	59	8	8,8	4,6	5,5	8,2	89	9	12,6	3,9	4,3	5,6
30	4	7,6	3,2	2,5	1,4	60	16,7	11,3	1,3	4,2	7,9	x	x	x	x	x	x

Fonte: [Kojadinovic 2008].

A Tabela 2 apresenta um extrato das probabilidades de maximizar as avaliações, obtidas com a aplicação da Equação (1). Esses resultados indicam, em cada disciplina, a probabilidade de cada nota ser superior às demais conjuntamente, atendendo ao princípio da aleatoriedade e independência das avaliações iniciais.

Tabela 2 – Probabilidades de Maximizar as avaliações (Extrato)

Aluno	Ing	Cmp	Alg	Ana	Fis	Aluno	Ing	Cmp	Alg	Ana	Fis
1	8,5E-05	2,8E-02	3,4E-04	2,2E-03	2,5E-02	46	2,0E-02	2,4E-02	3,8E-02	3,5E-02	6,8E-03
2	1,2E-03	7,1E-03	2,8E-05	4,0E-03	1,3E-03	47	1,5E-03	4,9E-03	1,0E-03	1,1E-03	2,7E-03
3	1,3E-02	9,1E-07	7,3E-04	2,0E-03	9,7E-03	48	8,5E-07	2,4E-05	1,1E-05	1,9E-03	1,4E-04
4	1,4E-03	1,3E-03	8,1E-05	1,6E-03	5,5E-04	49	1,2E-03	1,5E-04	9,8E-04	7,8E-03	8,3E-05
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
42	2,6E-03	8,1E-07	1,4E-03	1,1E-02	5,1E-03	87	5,3E-03	2,1E-01	7,7E-03	8,8E-03	1,2E-02
43	8,0E-08	7,0E-04	2,7E-04	6,5E-03	1,1E-02	88	7,1E-05	3,8E-04	3,3E-03	2,5E-02	9,7E-03
44	4,4E-02	1,8E-03	3,4E-04	5,1E-03	8,2E-03	89	2,6E-04	1,0E-02	3,4E-04	3,3E-03	2,9E-03
45	1,6E-02	2,0E-06	3,7E-03	8,3E-03	2,8E-02	Soma	1	1	1	1	1

Com as probabilidades de maximizar, foram computadas as probabilidades de interação entre as disciplinas. Os cálculos descritos na Etapa 3 da Seção 4 produziram as capacidades dos subconjuntos $S\{C_1, ..., C_n\}$, apresentadas na Tabela 3. Para cada subconjunto, as linhas da tabela indicam as 500 simulações efetuadas.

https://proceedings.science/p/85548?lang=pt-br

Tabela 3 – Capacidades das simulações (Extrato)

Sim.	{ }	{1}	{2}	{3}	{4}	{5}	{1,2}	{1,3}	{1,4}	{1,5}	(2,3}
1	0	0,4548	0,5283	0,3737	0,1757	0,3440	0,6285	0,6510	0,4815	0,4616	0,5765
2	0	0,4556	0,5292	0,3743	0,1761	0,3446	0,6292	0,6514	0,4823	0,4624	0,5773
3	0	0,4564	0,5302	0,3750	0,1764	0,3452	0,6299	0,6518	0,4830	0,4632	0,5782
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
498	0	0,8592	0,9981	0,7059	0,3320	0,6499	0,9985	0,8600	0,8593	0,8592	0,9983
499	0	0,8600	0,9991	0,7066	0,3323	0,6505	0,9993	0,8604	0,8601	0,8600	0,9992
500	0	0,8608	1,0000	0,7073	0,3326	0,6511	1,0000	0,8608	0,8608	0,8608	1

Sim..	{2,4}	{2,5}	{3,4}	{3,5}	{4,5}	{1,2,3}	{1,2,4}	{1,2,5}	{1,3,4}	{1,3,5}	{1,4,5}
1	0,5508	0,5594	0,4328	0,7177	0,3447	0,6792	0,6601	0,6563	0,6778	0,7964	0,4884
2	0,5517	0,5603	0,4333	0,7176	0,3453	0,6799	0,6608	0,6570	0,6781	0,7966	0,4891
3	0,5526	0,5612	0,4339	0,7176	0,3459	0,6805	0,6615	0,6576	0,6785	0,7967	0,4899
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
498	0,9982	0,9982	0,7062	0,7073	0,6499	0,9987	0,9986	0,9986	0,8601	0,8606	0,8593
499	0,9991	0,9991	0,7067	0,7073	0,6505	0,9994	0,9993	0,9993	0,8604	0,8607	0,8601
500	1	1	0,7073	0,7073	0,6511	1	1	1	0,8608	0,8608	0,8608

Sim..	{2,3,4}	{2,3,5}	{2,4,5}	{3,4,5}	{1,2,3,4}	{1,2,3,5}	{1,2,4,5}	{1,3,4,5}	{2,3,4,5}	{1,2,3,4,5}
1	0,5772	0,9205	0,5819	0,7184	0,7060	0,9993	0,6879	0,7972	0,9212	1
2	0,5781	0,9206	0,5828	0,7183	0,7066	0,9993	0,6886	0,7973	0,9214	1
3	0,5789	0,9208	0,5836	0,7183	0,7072	0,9993	0,6892	0,7974	0,9215	1
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
498	0,9983	0,9997	0,9983	0,7073	0,9988	0,9999	0,9987	0,8606	0,9996	1
499	0,9992	0,9998	0,9992	0,7073	0,9994	0,9999	0,9994	0,8607	0,9998	1
500	1	1	1	0,7073	1	1	1	0,8608	1	1

Com as capacidades disponíveis, foram efetuados os cálculos das integrais de Choquet, descritos na Etapa 4 da Seção 3. A Tabela 4 expõe um extrato dos resultados dos Alunos e o *ranking* dos cenários extremos.

Tabela 4 – Resultados das integrais de Choquet das simulações (Extrato)

Aluno	Sim 1	Rank	Sim 2	Rank		Sim 499	Rank	Sim 500	Rank
1	1,6E-02	25	1,6E-02	25	...	2,8E-02	25	2,8E-02	25
2	4,0E-03	57	4,0E-03	57	...	7,1E-03	56	7,1E-03	56
3	6,1E-03	49	6,1E-03	49	...	1,1E-02	46	1,1E-02	46
4	1,0E-03	78	1,0E-03	78	...	1,5E-03	80	1,5E-03	80
5	2,7E-02	12	2,7E-02	12	...	4,5E-02	13	4,5E-02	13
6	7,8E-04	83	7,8E-04	83	...	1,1E-03	83	1,1E-03	83
7	9,0E-04	81	9,0E-04	81	...	1,5E-03	78	1,5E-03	78
8	1,3E-02	32	1,3E-02	32	...	1,5E-02	38	1,5E-02	38
9	3,4E-03	62	3,4E-03	62	...	5,6E-03	64	5,6E-03	64
10	9,2E-04	80	9,2E-04	80	...	1,5E-03	79	1,5E-03	79
11	3,3E-03	65	3,3E-03	65	...	5,6E-03	62	5,6E-03	62
12	8,7E-03	39	8,7E-03	39	...	1,5E-02	39	1,5E-02	39
13	4,9E-03	55	4,9E-03	55	...	7,5E-03	52	7,5E-03	52
14	7,8E-03	43	7,8E-03	43	...	1,4E-02	41	1,4E-02	41
15	1,4E-02	30	1,4E-02	30	...	2,1E-02	31	2,1E-02	31
16	1,4E-02	31	1,4E-02	31	...	2,6E-02	27	2,6E-02	27
17	2,5E-03	69	2,5E-03	69	...	3,2E-03	72	3,2E-03	72
18	2,2E-02	19	2,2E-02	19	...	3,4E-02	21	3,4E-02	21
19	9,7E-04	79	9,7E-04	79	...	1,3E-03	82	1,3E-03	82
20	1,0E-01	3	1,1E-01	3	...	1,8E-01	2	1,8E-01	2
21	2,6E-02	14	2,7E-02	14	...	4,2E-02	15	4,2E-02	15
22	3,3E-03	64	3,3E-03	64	...	6,0E-03	60	6,0E-03	60

https://proceedings.science/p/85548?lang=pt-br

Aluno	Sim 1	Rank	Sim 2	Rank		Sim 499	Rank	Sim 500	Rank
23	1,9E-02	23	1,9E-02	23	...	2,9E-02	24	2,9E-02	24
24	3,7E-02	8	3,7E-02	8	...	6,8E-02	8	6,8E-02	8
25	2,7E-02	11	2,7E-02	11	...	5,1E-02	9	5,2E-02	9
26	4,5E-03	56	4,5E-03	56	...	6,8E-03	57	6,8E-03	57
27	4,9E-02	7	4,9E-02	7	...	9,2E-02	7	9,3E-02	7
28	7,6E-05	89	7,6E-05	89	...	1,3E-04	89	1,3E-04	89
29	1,5E-02	27	1,5E-02	27	...	2,2E-02	28	2,2E-02	28
30	3,2E-04	87	3,2E-04	87	...	5,2E-04	88	5,2E-04	88
31	5,3E-03	51	5,3E-03	51	...	9,7E-03	49	9,8E-03	49
32	3,6E-02	9	3,6E-02	9	...	4,8E-02	12	4,8E-02	12
33	1,4E-03	76	1,4E-03	76	...	1,8E-03	77	1,8E-03	77
34	5,0E-03	53	5,0E-03	53	...	7,2E-03	55	7,2E-03	55
35	1,0E-02	36	1,0E-02	36	...	1,1E-02	47	1,1E-02	47
36	1,6E-02	26	1,6E-02	26	...	1,9E-02	34	1,9E-02	34
37	8,0E-02	5	8,0E-02	5	...	9,3E-02	6	9,3E-02	6
38	2,4E-03	70	2,4E-03	70	...	3,3E-03	70	3,3E-03	70
39	9,0E-03	38	9,0E-03	38	...	1,6E-02	37	1,6E-02	37
40	3,4E-03	63	3,4E-03	63	...	5,4E-03	66	5,4E-03	66
41	1,2E-01	1	1,2E-01	1	...	1,3E-01	4	1,3E-01	4
42	3,6E-03	61	3,6E-03	61	...	5,8E-03	61	5,8E-03	61
43	4,0E-03	58	4,0E-03	58	...	7,3E-03	54	7,3E-03	54
44	2,1E-02	22	2,1E-02	22	...	3,8E-02	18	3,8E-02	18
45	1,3E-02	33	1,3E-02	33	...	2,2E-02	29	2,2E-02	29
46	2,4E-02	16	2,4E-02	16	...	3,4E-02	20	3,4E-02	20
47	3,2E-03	66	3,2E-03	66	...	4,9E-03	67	4,9E-03	67
48	3,7E-04	86	3,7E-04	86	...	6,8E-04	86	6,8E-04	86
49	2,0E-03	73	2,0E-03	73	...	3,3E-03	71	3,3E-03	71
50	4,8E-04	85	4,8E-04	85	...	8,4E-04	85	8,4E-04	85
51	7,4E-03	44	7,4E-03	44	...	1,4E-02	40	1,4E-02	40
52	6,5E-03	46	6,5E-03	46	...	1,1E-02	45	1,1E-02	45
53	1,7E-02	24	1,7E-02	24	...	2,9E-02	23	2,9E-02	23
54	2,4E-02	18	2,4E-02	18	...	3,9E-02	16	3,9E-02	16
55	6,8E-02	6	6,8E-02	6	...	1,1E-01	5	1,1E-01	5
56	5,0E-03	54	5,0E-03	54	...	9,4E-03	50	9,4E-03	50
57	3,2E-02	10	3,2E-02	10	...	4,9E-02	11	4,9E-02	11
58	3,8E-03	60	3,8E-03	60	...	5,6E-03	63	5,6E-03	63
59	5,1E-03	52	5,1E-03	52	...	9,1E-03	51	9,1E-03	51
60	2,7E-02	13	2,7E-02	13	...	4,9E-02	10	4,9E-02	10
61	6,1E-03	48	6,1E-03	48	...	6,8E-03	58	6,8E-03	58
62	1,4E-03	75	1,4E-03	75	...	2,5E-03	75	2,5E-03	75
63	1,3E-03	77	1,3E-03	77	...	2,1E-03	76	2,1E-03	76
64	6,3E-04	84	6,3E-04	84	...	1,1E-03	84	1,1E-03	84
65	2,7E-03	68	2,7E-03	68	...	3,0E-03	73	3,0E-03	73
66	6,4E-03	47	6,4E-03	47	...	7,5E-03	53	7,5E-03	53
67	8,0E-04	82	8,0E-04	82	...	1,3E-03	81	1,3E-03	81
68	9,7E-02	4	9,7E-02	4	...	1,5E-01	3	1,5E-01	3
69	2,4E-02	17	2,4E-02	17	...	3,9E-02	17	3,9E-02	17
70	2,3E-03	71	2,3E-03	71	...	3,8E-03	68	3,8E-03	68
71	1,3E-02	34	1,3E-02	34	...	2,1E-02	32	2,1E-02	32
72	1,8E-03	74	1,8E-03	74	...	2,8E-03	74	2,8E-03	74
73	8,4E-03	41	8,4E-03	41	...	1,2E-02	43	1,2E-02	43
74	1,5E-02	28	1,5E-02	28	...	2,0E-02	33	2,0E-02	33
75	9,5E-03	37	9,5E-03	37	...	1,7E-02	35	1,7E-02	35
76	2,9E-04	88	2,9E-04	88	...	5,3E-04	87	5,3E-04	87
77	7,9E-03	42	7,9E-03	42	...	1,3E-02	42	1,3E-02	42
78	3,9E-03	59	3,9E-03	59	...	6,7E-03	59	6,8E-03	59
79	2,1E-02	21	2,1E-02	21	...	2,9E-02	22	3,0E-02	22
80	3,1E-03	67	3,1E-03	67	...	5,5E-03	65	5,5E-03	65
81	1,4E-02	29	1,4E-02	29	...	2,7E-02	26	2,7E-02	26

https://proceedings.science/p/85548?lang=pt-br

Aluno	Sim 1	Rank	Sim 2	Rank		Sim 499	Rank	Sim 500	Rank
82	1,1E-02	35	1,1E-02	35	...	2,1E-02	30	2,1E-02	30
83	8,5E-03	40	8,5E-03	40	...	1,6E-02	36	1,6E-02	36
84	2,2E-03	72	2,2E-03	72	...	3,7E-03	69	3,7E-03	69
85	2,1E-02	20	2,2E-02	20	...	3,6E-02	19	3,6E-02	19
86	2,5E-02	15	2,5E-02	15	...	4,4E-02	14	4,4E-02	14
87	1,1E-01	2	1,1E-01	2	...	2,1E-01	1	2,1E-01	1
88	7,3E-03	45	7,3E-03	45	...	1,2E-02	44	1,2E-02	44
89	5,8E-03	50	5,8E-03	50	...	1,0E-02	48	1,0E-02	48

Os valores das integrais de Choquet, referentes aos quatro Alunos melhor ranqueados, foram transportados ao gráfico da Fig. 2. O eixo vertical destacado no gráfico indica uma "fotografia" da interação dos critérios, definida pelo escore progressista-otimista do CPP-Choquet. Esse instante indica certa cautela em relação ao desempenho do Aluno 41, dada a instabilidade de ordem aos diferentes cenários, variando do 1º ao 4º lugar. Ele se mantém em primeiro lugar em somente 39 das 500 simulações (i.e. 7,8%), que equivale ao contexto de aditividade dos critérios, em que os critérios interagem de maneira disjunta (i.e. interações similares à Fig. 1(a)). Considerando que as disciplinas apresentam conteúdos em comum, no sentido da abordagem de assuntos relacionados ao raciocínio matemático (i.e. Álgebra e Física), conforme descrito por [Kojadinovic 2008], é lícito admitir que a permanência do Aluno 41 em primeiro lugar pode ser menos realista quando comparada a colocações mais intermediárias. É importante, ainda, ressaltar que o sentido dos cenários (i.e. para a direita ou esquerda) não indica, em geral, evolução do desempenho, apenas a variação de ranking com a mudança na interação entre os critérios. O Aluno 87, na maior parcela de cenários, se comporta com o melhor desempenho entre os 89 alunos, seguido dos Alunos 20 e 68.

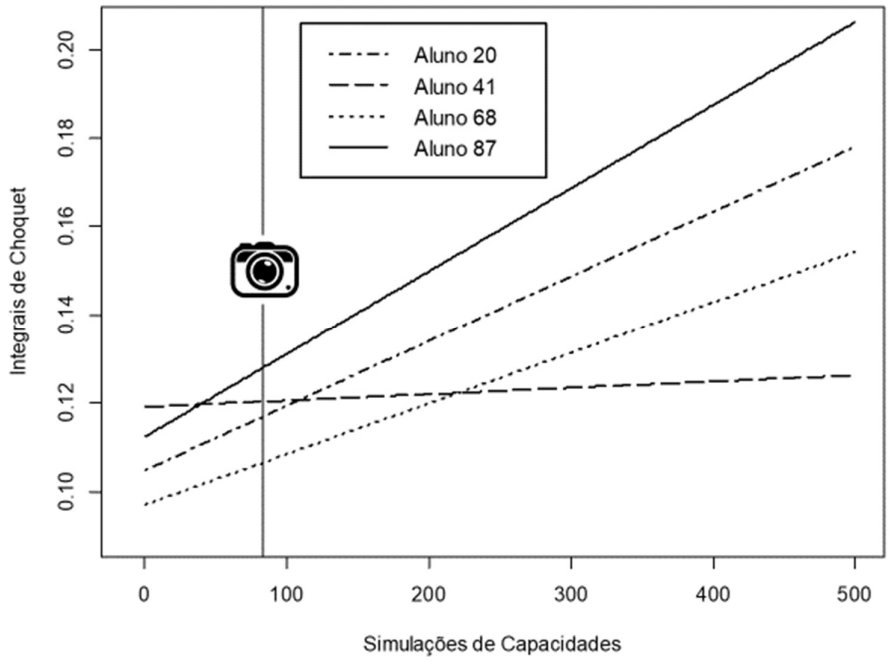


Figura 2 – Resultados dos quatro Alunos com melhores escores da integral de Choquet

Com as capacidades disponíveis, também foram efetuados os cálculos dos índices de Shapley, descritos na Etapa 5 da Seção 3. A Tabela 5 apresenta um extrato dos resultados desses índices dos critérios. Os resultados demonstraram maior estabilidade nos índices de Shapley, sendo destacados os cenários intermediários em que se verificaram inversões de ordem dos pesos dos critérios. A disciplina "Computação", de maneira geral, se comportou como o critério de maior importância no problema. Os pesos, em cada cenário, respeitam os axiomas de capacidades.

Tabela 5 – Resultados dos índices de Shapley das simulações (Extrato)

Sim	Inglês	Rank	Computação	Rank	Álgebra	Rank	Análise	Rank	Física	Rank
1	0,192258475	4	0,259114896	2	0,277512119	1	0,047377260	5	0,223737250	3
2	0,192357419	4	0,259358795	2	0,277286381	1	0,047415642	5	0,223581762	3
3	0,192456363	4	0,259602694	2	0,277060644	1	0,047454024	5	0,223426275	3
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
130	0,205022273	3	0,290577843	1	0,248391940	2	0,052328545	5	0,203679399	4
131	0,205121217	3	0,290821742	1	0,248166202	2	0,052366927	5	0,203523912	4
132	0,205220161	3	0,291065640	1	0,247940464	2	0,052405309	5	0,203368425	4
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
498	0,241433729	2	0,380332605	1	0,16532042	3	0,066453141	5	0,146460105	4
499	0,241532673	2	0,380576504	1	0,165094682	3	0,066491523	5	0,146304618	4
500	0,241631617	2	0,380820403	1	0,164868944	3	0,066529905	5	0,146149130	4

6. Considerações Finais

Este artigo teve por finalidade apresentar uma proposta de análise de sensibilidade ao CPP-Choquet. Esse método se destina à solução de problemas MCDA, que requeiram a ordenação de alternativas, com base na interação de critérios. O método calcula as capacidades de subconjuntos de critérios de avaliações por probabilidades do escore progressista-otimista do CPP. Essas interações refletem, de fato, um estado de relacionamento entre os critérios. A proposta ampliou a quantidade desses estados, de forma a simular uma quantidade de capacidades que permitisse avaliar o comportamento das alternativas em amplo espectro.

Algumas futuras pesquisas podem decorrer desta. O cálculo das capacidades, apresentado na Etapa 3, pode ser correlacionado à entropia dos subconjuntos de critérios, pois as probabilidades são proporcionais aos valores máximos dos subconjuntos. Isto, de certa forma, é acompanhado pelo valor de entropia, utilizado por [Kojadinovic 2008], na referência-base desta pesquisa. Assim, estima-se uma elevada correlação entre os resultados do CPP-Choquet e de capacidades por entropia, o que pode estimular nova pesquisa. Outra possibilidade seria explorar o cálculo da importância dos critérios com outros índices, além do de Shapley, como os de Penrose-Banzhaf [Sant'Anna 2015a, p. 15].

Referências

Choquet, G. (1953). Theory of capacities. In *Annales de l'institut Fourier* (Vol. 5, pp. 131–295). Institut Fourier.

Grabisch, M., Kojadinovic, I., Nantes, S. P., & Meyer, P. (2006). Using the Kappalab R package for capacity identification in Choquet integral based MAUT. In *11th International Conference on Information Processing and Management of Uncertainty in Knowledge-based Systems* (pp. 1702–1709).

https://proceedings.science/p/85548?lang=pt-br

Grabisch, M., & Labreuche, C. (2010). A decade of application of the Choquet and Sugeno integrals in multi-criteria decision aid. *Annals of Operations Research*, *175*(1), 247–290.

Grabisch, M., & Roubens, M. (2000). Application of the Choquet integral in multicriteria decision making. *Fuzzy Measures and Integrals-Theory and Applications*, 348–374.

Kojadinovic, I. (2008). Unsupervized Aggregation of Commensurate Correlated Attributes by Means of the Choquet Integral and Entropy Functionals. *International Journal of Intelligent Systems*, *23*(1), 128–154.

Merad, M., Dechy, N., Serir, L., Grabisch, M., & Marcel, F. (2013). Using a multi-criteria decision aid methodology to implement sustainable development principles within an organization. *European Journal of Operational Research*, *224*(3), 603–613.

Pomerol, J.-C., & Barba-Romero, S. (2012). *Multicriterion decision in management: principles and practice*. New York: Springer.

R-Core-Team. (2016). R: A language and environment for statistical computing. *Http://www. R-Project. Org*. Vienna, Austria.

Ross, S. (2009). *Probabilidade: um curso moderno com aplicaçoes* (8th ed.). São Paulo: Bookman Editora.

Sant'Anna, A. P. (2014a). Alternativas probabilísticas para a composição do Indicador de Desenvolvimento Humano. In *Congresso Nacional de Excelência em Gestão - X CNEG* (pp. 1–16).

Sant'Anna, A. P. (2014b). Aplicação do CPP-Tri à classificação dos países pelos critérios do IDH. In *Encontro Nacional de Engenharia de Produção - XXXVI ENEGEP* (pp. 1–15). Curitiba.

Sant'Anna, A. P. (2015a). *Probabilistic Composition of Preferences, Theory and Applications*. New York: Springer.

Sant'Anna, A. P. (2015b). Probabilistic Human Development Indices. *Brazilian Journal of Operations & Production Management*, *12*(1), 136–146.

Sant'Anna, A. P., Gomes, L. F. A. M., Costa, F. F. da, Rangel, L. A. D., Faria, M. J. da S., Ferreira, R. G., … Senna, V. de. (2012). Análise multicritério baseada em probabilidades de preferência. In V. F. de Oliveira, V. Cavenaghi, & F. S. Másculo (Eds.), *Tópicos emergentes e desafios metodológicos em Engenharia de Produção: casos, experiências e proposições - Volume V* (p. 258). Rio de Janeiro: ABEPRO.

Shapley, L. S. (1953). A Value for n-Person Games. In *Contributions to the Theory of Games, vol II, by H.W. Kuhn and A.W. Tucker (Eds) Annals of Mathematical Studies* (Vol. 28, pp. 307–317). Princeton University Press.

Šipošová, A., Šipeky, L., Rindone, F., Greco, S., & Mesiar, R. (2017). Super- and subadditive constructions of aggregation functions. *Information Fusion*, *34*, 49–54.

Souza, R. G. de, Clímaco, J. C. N., Sant'Anna, A. P., Rocha, T. B., Valle, R. de A. B. do, & Quelhas, O. L. G. (2016). Sustainability assessment and prioritisation of e-waste management options in Brazil. *Waste Management*.

https://proceedings.science/p/85548?lang=pt-br