UM ESTUDO SOBRE A MATRIZ DISTÂNCIA DE GRAFOS

Joice Santos do Nascimento
Universidade do Estado do Rio de Janeiro
Rua São Francisco Xavier, 524 - Pavilhão Reitor João Lyra Filho - 6º andar -Bloco B, Rio de Janeiro, RJ
joicesantos@ime.uerj.br

Maria Aguieiras Alvarez de Freitas
Universidade Federal do Estado do Rio de Janeiro
Cidade Universitária, Centro Tecnolólico, Bloco F- Rio de Janeiro, RJ
maguieiras@im.ufrj.br

Renata Raposo Del-Vecchio
Universidade Federal Fluminense
Rua Professor Marcos Waldemar de Freitas Reis, s/n, Blocos G - Campus do Gragoatá - São Domingos - Niterói - RJ
renata@vm.uff.br

RESUMO

Neste trabalho, estudamos a matriz distância de grafos *threshold*. O objetivo é determinar a multiplicidade de -1 e -2 como autovalores e o número de autovalores distintos da matriz distância, a partir da observação da sequência binária que define o grafo.

PALAVRAS CHAVE. Threshold, autovalores e distância

Tópicos (Teoria e Algoritmos em Grafos.)

ABSTRACT

In this paper, we study the distance matrix of threshold graph. The goal is determine the multiplicity of the -1 and -2 as eigenvalue and the number of distinct distance eigenvalue of threshold graph, from the observation of the binary sequence that define it.

KEYWORDS. Threshold, eigenvalues and distance

Paper topics (Theory and Algorithm in Graphs)

https://proceedings.science/p/85528?lang=pt-br

1. Introdução

Seja G um grafo simples, conexo com n vértices. A matriz de adjacência A de G é a matriz quadrada de ordem n cujas entradas a_{ij} são iguais a 1, se os vértices v_i e v_j são adjacentes, e 0 caso contrário. A matriz distância D de G é a matriz quadrada de ordem n cujas as entradas d_{ij} são dadas pela distância entre os vértices v_i e v_j, isto é, pelo número de arestas de um menor caminho que os liga em G. Como o grafo é não orientado, temos que as matrizes de adjacência e distância são simétricas e, portanto, seus respectivos autovalores são reais e são chamados de autovalor e D-autovalor de G, respectivamente.

A classe de grafos *threshold* possui aplicações em várias áreas como psicologia, sincronização de processos paralelos, eficiência e estabilidade de estruturas de redes, entre outras Mahade e Peled [1995]; M. D. Konig e Schweitzer [2012]. Provavelmente, devido às inúmeras aplicações, tal classe é caracterizada de várias maneiras, entre elas temos grafos livres de $\{K_2 \cup K_2, C_4, P_4\}$, grafos *nested split*, unigrafos, entre outras. Nesse trabalho, definimos um grafo *threshold* através de sua sequência binária, ou seja, G é um grafo *threshold* com n vértices definido por uma sequência binária $(b_1, b_2, \ldots, b_n)$, onde $b_i = 0$, representa adição de um vértice isolado e $b_i = 1$, representa adição de um vértice dominante (o vértice v_i é dominante se $\{v_i, v_j\} \in E$ para todo $j < i$). O número de entradas unitárias da sequência binária é chamado de *traço* do grafo, e será denotado por τ. Por convenção, definimos que $b_1 = 0$ e $b_n = 1$ em todo grafo *threshold*, isto é, todo grafo *threshold* aqui mencionado será conexo.

Como todo grafo *threshold* tem diâmetro 2, temos que: $D = 2J - 2I - A$, onde J é a matriz quadrada de ordem n cujas entradas são todas iguais a 1 e I é a matriz identidade de ordem n. Assim, para grafos *threshold*, podemos relacionar os autovalores -1 e 0 associados à matriz de adjacência com os autovalores -1 e -2 associados à matriz distância do mesmo grafo. Em Sciriha e Farrugia [2011], Sciriha e Farrugia provaram que os autovetores da matriz de adjacência associados a -1 e 0 são ortogonais ao vetor cujas entradas são todas iguais a 1. Logo, se v é um autovetor da matriz de adjacência associado a -1 temos que: $Dv = 2Jv - 2Iv - Av = -2v + v = -v$. E se v é um autovetor da matriz de adjacência associado a 0 temos que: $Dv = 2Jv - 2Iv - Av = -2v$. Assim, se -1 e/ou 0 são autovalores associados à matriz de adjacência então -1 e /ou -2 são autovalores associados à matriz distância, com as mesmas multiplicidades.

Ainda no artigo Sciriha e Farrugia [2011], foi determinado a multiplicidade de 0 como um autovalor da matriz de adjacência de um grafo *threshold*. Para entender o enunciado do Teorema 1.1 precisamos das seguintes definições: dois vértices não adjacentes v_i e v_j de um grafo são ditos *falsos gêmeos* quando seus conjuntos de vértices adjacentes são iguais e um *grafo canônico* é obtido a partir de um grafo *thershold* pela supressão dos falsos gêmeos permitindo apenas um vértice representante em cada caso, ou seja, se v_i e v_j são vértices de um grafo *threshold* G que são falsos gêmeos, no grafo canônico de G, v_i e v_j são o mesmo vértice.

Teorema 1.1 *Seja G um grafo threshold e A sua matriz de adjacência. A nulidade de A é igual ao número de vértices removidos de G para obter um grafo canônico.*

A multiplicidade de 0 como um autovalor da matriz adjacência é igual à dimensão de seu núcleo, ou seja, à nulidade de A.

Em Jacobs et al. [2013], Jacobs et al descreveram um algoritmo que localiza os D-autovalores de um grafo *threshold* qualquer, chamado $diagonalize(G, y)$. Neste algoritmo, tendo como entradas a sequência binária que define o grafo *threshold* G e um número real y, temos como saída a diagonal principal de uma matriz congruente a matriz $D - yI$, onde I é a matriz identidade de ordem n. Pelo teorema de Silvester através dessa matris diagonal obtemos o número de D-autovalores localizados nos intervalos $(-\infty, -y)$ e $(-y, +\infty)$

https://proceedings.science/p/85528?lang=pt-br

e, ainda, a multiplicidade de $-y$ como D-autovalor. O algoritmo *diagonalize*(D, y) está apresentado abaixo:

Algorithm 1 Algoritmo de Diagonalização

Require: Grafo G e $y \in \mathbb{R}$
Ensure: Matriz diagonal D

procedure *Diagonaliza*(G, y)
  for all i **do** $d_i \leftarrow y$
  end for
  for m $\leftarrow$ n **to** 2 **do**
    $\alpha \leftarrow d_m$
    if $b_{m-1} = 1$ **and** $b_m = 1$ **then**
      if $\alpha + y \neq 2$ **then** ▷ subcaso 1a
        $d_{m-1} \leftarrow \frac{\alpha y - 1}{\alpha + y - 2}$
        $d_m \leftarrow \alpha + y - 2$
      else
        if $y = 1$ **then** ▷ subcaso 1b
          $d_{m-1} \leftarrow 1$
          $d_m \leftarrow 0$
        else ▷ subcaso 1c
          $d_{m-1} \leftarrow 1$
          $d_m \leftarrow -(1 - y)^2$
          $b_{m-1} \leftarrow 0$
    else
      if $b_{m-1} = 0$ **and** $b_m = 1$ **then**
        if $y = 0$ **then** ▷ subcaso 2a
          $d_{m-1} \leftarrow 1$
          $d_m \leftarrow -1$
        else ▷ subcaso 2b
          $d_{m-1} \leftarrow \alpha - \frac{1}{y}$
          $d_m \leftarrow y$
          $d_{m-1} \leftarrow 1$
  end for

Sobre os autovalores distintos de -1 e -2, Jacob *et al* provaram que:

Teorema 1.2 *Jacobs et al. [2013] Seja D a matriz distância de um grafo threshold G. Então todo D-autovalor $\alpha \neq -1, -2$ de G é simples.*

2. Resultados

Em Jacobs et al. [2013], foi descrito um algoritmo que localiza os D-autovalores de um grafo threshold qualquer, chamado *diagonalize*(G, y). Neste algoritmo, tendo como entradas a sequência binária que define o grafo *threshold* G e um número real y, obtemos o número de D-autovalores localizados nos intervalos $(-\infty, y)$ e $(y, +\infty)$ e, ainda, a multiplicidade de y como D-autovalor.

Para realizar nosso estudo, definiremos um novo parâmetro que, junto com o algoritmo *diagonalize*(G, y), serão importantes para determinar as multiplicidades de -2 e -1 como D-autovalores de um grafo *threshold* qualquer. Como consequência deste resultado, determinamos o número de D-autovalores distintos de um grafo *threshold*. Além disso,

https://proceedings.science/p/85528?lang=pt-br

vemos o significado estrutural deste parâmetro. Por abuso de linguagem escrevemos que o grafo *threshold* é igual a sequência binária que o define.

Exemplo 2.1 *Consideremos o grafo threshold:*

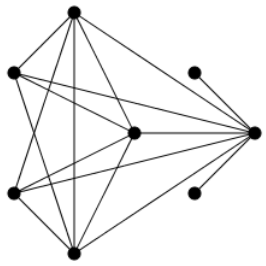


Figura 1: Grafo threshold $(0,0,1,1,1,0,0,1)$

Observemos que aplicando o algoritmo *diagonalize*$(G,-1)$ Jacobs et al. [2013] teremos:

b_i	d_i	b_i	d_i	b_i	d_i	b_i	d_i	b_i	d_i	b_i	d_i	b_i	d_i	b_i	d_i
0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	$\frac{4}{3}$
0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	0	0	$-\frac{3}{4}$
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	$\frac{1}{4}$	1	$\frac{1}{4}$
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	0	1	0
1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	0	1	0	1	0
0	1	0	1	0	$\frac{4}{3}$	0	$-\frac{2}{3}$	0	$-\frac{2}{3}$	0	$-\frac{2}{3}$	0	$-\frac{2}{3}$	0	$-\frac{2}{3}$
0	1	0	0	0	$-\frac{3}{4}$	0	$-\frac{3}{4}$	0	$-\frac{3}{4}$	0	$-\frac{3}{4}$	0	$-\frac{3}{4}$	0	$-\frac{3}{4}$
1	1	1	$\frac{1}{4}$	1	$\frac{1}{4}$	1	$\frac{1}{4}$	1	$\frac{1}{4}$	1	$\frac{1}{4}$	1	$\frac{1}{4}$	1	$\frac{1}{4}$

Como consequência do algoritmo, temos que -1 é um D-autovalor duplo de G e pelo Teorema 1.1 -2 também é um D-autovalor duplo de G (temos dois pares de vértices que são falsos gêmeos). Generalizamos esse raciocínio para estudar a multiplicidade de -2 e -1 em qualquer grafo *threshold*. Para tal definimos um novo parâmetro: a variação binária.

Definição 2.2 *Seja G um grafo threshold e $(b_1, b_2, \ldots, b_n)$ sua sequência binária. A variação binária ξ de G é o número de elementos do conjunto $\{i | b_i = 0, b_{i+1} = 1, 1 \leq i \leq n-1\}$.*

Observemos que $1 \leq \xi \leq \tau$, onde τ é o traço de G.

Nosso próximo resultado determina, exatamente, a multiplicidade de -2 e -1 como D-autovalores de um grafo *threshold* em função de ξ, levando em consideração que essa multiplicidade pode ser nula, ou seja, -2 ou -1 podem não ser D-autovalores do grafo em questão.

Teorema 2.3 *Seja $G = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ um grafo threshold com traço τ e variação binária ξ. Então $m_D(-2) = n - \tau - \xi$ e $m_D(-1) = \tau - \xi$, se $b_2 = 0$ ou $m_D(-1) = \tau - \xi + 1$, se $b_2 = 1$.*

Demonstração: Escreva a sequência binária de G da seguinte maneira: $(0^{r_1}, 1^{s_1}, 0^{r_2}, 1^{s_2}, \ldots, 0^{r_\xi}, 1^{s_\xi})$, onde cada r_i e s_i são números inteiros não negativos e representam o número de zeros ou unidades em cada bloco.

Apliquemos o algoritmo *diagonalize*$(G,-1)$ Jacobs et al. [2013] na sequência binária começando pelo último bloco de unidades:

https://proceedings.science/p/85528?lang=pt-br

b_1	d_i	b_1	d_i	b_1	d_i	b_1	d_i	b_1	d_i
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
0	1	0	1	0	1	0	1	0	$0(*)$
1	1	1	1	1	1	1	1	1	$\frac{1}{4}$
1	1	1	1	1	1	1	0	1	0
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
1	1	1	1	1	1	1	0	1	0
1	1	1	1	1	0	1	0	1	0
1	1	1	0	1	0	1	0	1	0

Apliquemos o algoritmo para a sequência de zeros anterior:

b_1	d_i	b_1	d_i	b_1	d_i	b_1	d_i	b_1	d_i	b_1	d_i
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	1	0	1	0	1	0	$\frac{11-26r_\xi}{32r_\xi-16}$	0	$\frac{75-154r_\xi}{128r_\xi-64}$
0	1	0	1	0	1	0	1	0	$\frac{-3-2(r_\xi-1)}{4+8(r_\xi-1)}$	0	$\frac{-3-2(r_\xi-1)}{4+8(r_\xi-1)}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
0	1	0	1	0	1	0	$\frac{12}{7}$	0	$-\frac{9}{28}$	0	$-\frac{9}{28}$
0	1	0	1	0	$\frac{8}{5}$	0	$-\frac{7}{20}$	0	$-\frac{7}{20}$	0	$-\frac{7}{20}$
0	1	0	$\frac{4}{3}$	0	$-\frac{5}{12}$	0	$-\frac{5}{12}$	0	$-\frac{5}{12}$	0	$-\frac{5}{12}$
0	0	0	$-\frac{3}{4}$	0	$-\frac{3}{4}$	0	$-\frac{3}{4}$	0	$-\frac{3}{4}$	0	$-\frac{3}{4}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

Observemos que para a próxima sequência de unidades o algoritmo recomeça. Então, cada sequência de s_i unidades da sequência binária determina uma sequência de $s_i - 1$ zeros no resultado do algoritmo.

E ainda, se $r_1 = 1$, isto é, $b_2 = 1$, temos que o último passo do algoritmo $(*)$ garante mais uma entrada nula e assim:

$$m_D(-1) = \sum_{i=1}^{\xi}(s_i - 1) + 1 = \tau - \xi + 1$$

E se $r_1 \neq 1$, isto é, $b_2 = 0$, a entrada nula do passo $(*)$ é substituida por uma entrada não nula, logo:

$$m_D(-1) = \sum_{i=1}^{\xi}(s_i - 1) = \tau - \xi$$

Como as entradas nulas da sequência binária definem os falsos gêmeos do grafo, temos exatamente ξ conjuntos de falsos gêmeos num total de $n - \tau$ vértices. Pelo teorema 1.1, temos que a multiplicidade de -2 é por:

$$m_D(-2) = n - \tau - \xi.$$

■

Exemplo 2.4 *Vejamos os seguintes grafos threshold:*

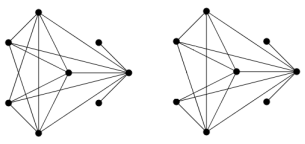


Figura 2: Grafo threshold G_1 e G_2

https://proceedings.science/p/85528?lang=pt-br

Os grafos $G_1 = (0,0,1,1,1,0,0,1)$ *e* $G_2 = (0,1,0,1,1,0,0,1)$ *possuem* $n = 8$ *vértices e traço* $\tau = 4$. *A variação binária de* G_1 *é* $\xi = 2$, *então* $m_D(-1) = \tau - \xi = 2$ *e* $m_D(-2) = n-\tau-\xi = 2$. *Já a variação binária de* G_2 *é* $\xi = 3$ *então* $m_D(-1) = \tau-\xi+1 = 2$ *e* $m_D(-2) = n - \tau - \xi = 1$.

Observemos que a partir do Teorema 2.3 temos uma propriedade do D-espectro de um grafo *threshold*, discutida no corolário a seguir:

Corolário 2.5 *Seja* G *um grafo threshold. Então* -1 *ou* -2 *sempre será um* D*-autovalor de* G.

Demonstração: De fato, suponha que o traço de G é τ e sua variação binária é ξ. Se -2 e -1 não fossem D-autovalores de G então pelo teorema 2.3 temos que $m_D(-2) = n-\tau-\xi = 0$ e $m_D(-1) = \tau-\xi = 0$ ou $m_D(-1) = \tau-\xi+1 = 0$. Se $m_D(-1) = \tau-\xi+1 = 0$ teríamos que $\xi = \tau+1$ o que é um absurdo pois $\xi \leq \tau$. Se $m_D(-2) = n-\tau-\xi = 0$ e $m_D(-1) = \tau-\xi = 0$ então $\xi = n - \tau = \tau$. Isso significa que ξ é igual ao número de entradas nulas e de entradas unitárias da sequência binária que define G.

Então, pela definição de ξ, a sequência binária de G não possui zeros nem uns consecutivos, ou seja, $G = (0,1,0,1,0,1\ldots,1)$, isto é, $b_2 = 1$. Mas pelo o que foi desenvolvido no Teorema 2.3 temos que $m_D(-1) = \tau - \xi + 1 = 1$, absurdo! ∎

A partir do Teorema 2.3 podemos determinar o número de D-autovalores distintos de um grafo *threshold*, em função da variação binária.

Corolário 2.6 *Seja* G *um grafo threshold com variação binária* ξ. *Então:*

$$\mathfrak{N}_D(G) \in \{2\xi, 2\xi+1, 2\xi+2\}.$$

Demonstração: Seja $G = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ um grafo threshold com n vérices, traço τ e variação binária ξ.

Se -2 e -1 são D-autovalores de G então o número de D autovalore distintos é dado por:

$$\mathfrak{N}_D(G) = \begin{cases} n-(n-\tau-\xi)-(\tau-\xi)+2 = 2\xi+2 \\ n-(n-\tau-\xi)-(\tau-\xi+1)+2 = 2\xi+1 \end{cases}$$

Se -2 não é um D-autovalor de G, então, $n-\tau = \xi$ e $r_1 = 1$. Assim, G tem $\mathfrak{N}_D(G) = n-(\tau-\xi+1)+1 = 2\xi$ D-autovalores distintos.

Se -1 não é um D-autovalor de G, então, $\xi = \tau$ e $r_1 > 1$. Assim, G tem $\mathfrak{N}_D(G) = n-(n-\tau-\xi)+1 = 2\xi+1$ D-autovalores distintos. ∎

Exemplo 2.7 *Sejam os grafos* $G_1 = (0,0,1,1,1,0,0,1)$, $G_2 = (0,1,0,1,1,0,0,1)$, $G_3 = (0,1,0,1,0,1,0,1)$ *e* $G_4 = (0,0,1,0,1,0,1)$. *Temos que seus* D*-espectros têm, respectivamente,* $2\xi_1+2 = 6$, $2\xi_2+1 = 7$, $2\xi_3 = 8$ *e* $2\xi_4+1 = 7$, D*-autovalores distintos, onde* ξ_i *é a variação binária de* G_i *para cada* $i = 1,2,3,4$. *A saber, seus respectivos espectros são:*

- $spec_D(G_1) = (5+\sqrt{29}; \frac{\sqrt{13}-3}{2}; 5-\sqrt{29}; -1^2; -2^2; \frac{-\sqrt{13}-3}{2})$,
- $spec_D(G_2) = (10,563; -0,349; -0,645; -1^2; -2, -2,351; -3,218)$,
- $spec_D(G_3) = (10,312; -0,267; -0,679; -0,776; -1; -2,237; -2,374; -2,977)$

https://proceedings.science/p/85528?lang=pt-br

- $spec_D(G_4) = (7,618; 0,382; -0,581; -0,767; -2; -2,148; -2,503)$.

Ainda podemos usar o algoritmo $diagonalize(G, y)$ para localizar os D-autovalores, distintos de -2 e -1, em intervalos:

Proposição 2.8 *Seja G um grafo* threshold *com variação binária ξ. Então o número de D-autovalores no intervalo $(-\infty, -2)$ é $\xi - 1$ e no intervalo $(-1, +\infty)$ é ξ se $b_2 = 1$ ou $\xi + 1$ se $b_2 = 0$.*

Demonstração:

Observemos que no algoritmo $diagonalize(G, -2)$ realizado na demonstração do Teorema 2.3 aparecem $\xi - 1$ entradas iguais a -1 e as demais entradas não nulas são positivas. Logo, existem $\xi - 1$ D-autovalores menores que -2. De maneira análoga, no algoritmo $diagonalize(G, -1)$, também realizado na demonstração do Teorema 2.3, aparecem ξ entradas iguais a $\frac{1}{4}$, uma entrada igual a $\frac{4}{3}$ e as demais entradas não nulas são negativas, quando $r_1 \neq 1$. Logo, existem $\xi + 1$ D-autovalores maiores que -1. Agora, se $r_1 = 1$ temos que as estradas positivas são apenas as iguais a $\frac{1}{4}$, o que garante existem ξ D-autovalores maiores que -1. ∎

Observação 2.9 *Não existem D-autovalores de G no intervalo $(-2, -1)$.*

Dado um grafo *threshold* com n vértices temos que a variação binária ξ está entre 1 e $\frac{n}{2}$. Vamos caracterizar nas duas próximas seções os grafos com variação binária máxima e mínima.

3. Grafos com variação binária mínima

Iniciamos caracterizando os grafos com variação binária mínima, isto é, $\xi = 1$. Neste caso temos os grafos split-completo.

Observe ainda que se o traço de um grafo *split-completo* G é $\tau = 1$ então G é a estrela $K_{1,n-1}$ e se $\tau = n-1$ temos que G é o completo K_n. Em ambos os casos conhecemos o D-espectro dos grafos:

$$spec_D(K_{1,n-1}) = (n - 2 + \sqrt{n^2 - 3n + 5}, n - 2 - \sqrt{n^2 - 3n + 5}, -2^{n-2})$$
$$spec_D(K_n) = (n - 1, -1^{n-1}).$$

Encontramos na literatura uma descrição do D-espectro do *join* de grafo regulares que nos auxilia na determinação do D-espectro de um grafo *split-completo*.

Teorema 3.1 *Stevanovic e Indulal [2009] Para $i = 1, 2$, sejam G_i um grafo k_i-regular com n_i vértices e $\lambda_{i,1} = k_i, \lambda_{i,2}, \ldots, \lambda_{i,n_i}$ o espectro da matriz adjacência de G_i. O D-espectro de $G_1 \vee G_2$ consiste em $\lambda_{i,j_i} - 2$, $2 \leq j_i \leq n_i$, e*

$$n_1 + n_2 - 2 - \tfrac{k_1+k_2}{2} \pm \sqrt{(n_1 - n_2 - \tfrac{k_1-k_2}{2})^2 + n_1 n_2}$$

Em Aouchiche e Hansen [2014] foi descrito o D-espectro de um grafo *split-completo* utilizando o Teorema 3.1, da seguinte maneira: seja $K_q \vee (n-q)K_1$ um grafo split-completo então seu D-espectro contém -1 com multipicidade $q - 1$, -2 com multiplicidade $n - q - 1$ e

$$n - \tfrac{q+3}{2} \pm \sqrt{\tfrac{(n-3q+1)^2}{4} + q(n-q)}.$$

É imediato ver que os grafos K_n e $K_{1,n-1}$ não satisfazem tal Corolário ($q = 1$ e $q = n - 1$). O erro ocorreu em alguma substituição algébrica ao utilizar o Teorema 3.1. Para reparar tal erro podemos utilizar o Teorema 3.1, porém escolhemos utilizar o conteúdo exposto nesse trabalho para obter o resultado.

https://proceedings.science/p/85528?lang=pt-br

Corolário 3.2 *Seja G um grafo* split-completo *com n vértices, $G \neq K_n$ e $G \neq K_{1,n-1}$. Então $\mathfrak{N}_D(G) = 4$, e os D-autovalores são: -1, -2 e*

$$\frac{(2n-\tau-3) \pm \sqrt{(2n-3\tau-1)^2 + 4\tau(n-\tau)}}{2}.$$

Demonstração: Por hipótese temos que $\xi = 1$, $\tau \neq 1$ e $\tau \neq n-1$ então, pelo Teorema 2.3, -2 e -1 são D-autovalores de G e, pelo Corolário 2.6, temos $2(\xi+1) = 4$ D-autovalores distintos de G.

Também podemos representar G por $(n-\tau)K_1 \vee K_\tau$. Assim, a matriz distância de G é dada por:

$$\begin{bmatrix} 2(J-I)_{n-\tau} & J_{n-\tau,\tau} \\ J_{\tau,n-\tau} & (J-I)_\tau \end{bmatrix}$$

Usando a reduzida da matriz D e o Teorema **??**, temos que os D-autovalores distintos de -1 e -2 são os autovalores da matriz D' abaixo:

$$\begin{bmatrix} 2(n-\tau-1) & \tau \\ n-\tau & \tau-1 \end{bmatrix}$$

O polinômio característico de D' é dado por:

$$p(\lambda) = \lambda^2 - (2n-\tau-3)\lambda + \tau(n-\tau) - 2(n-1).$$

E suas raízes são:

$$\frac{(2n-\tau-3) \pm \sqrt{(2n-3\tau-1)^2 + 4\tau(n-\tau)}}{2}.$$

■

Exemplo 3.3 *Seja $G = (0,0,0,0,1,1,1,1,1)$ o grafo split-completo, com $n = 9$ vértices, traço $\tau = 5$, variação binária $\xi = 1$. O D-espectro de G é $(5+\sqrt{21}, 5-\sqrt{21}, -1^4, -2^3)$.*

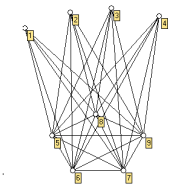


Figura 3: Grafo split-completo

4. Grafos com variação binária máxima

O outro extremo de ξ é $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$,ou seja, $\xi = \frac{n}{2}$ se n é par e $\xi = \frac{n-1}{2}$ se n é ímpar. Ambos os casos só são possíveis de ocorrer quando temos o máximo de unidades não consecutivas. 1° caso: n par. Temos $\xi = \frac{n}{2}$ e $\tau = \xi$. Neste caso o grafo que realiza esta cota é $G_1 = (0,1,0,1,\ldots,0,1)$.

Exemplo 4.1 *O grafo threshold abaixo tem $n = 6$ vértices e $\tau = \xi = 3$.*

https://proceedings.science/p/85528?lang=pt-br

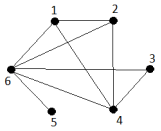


Figura 4: Grafo threshold $G = (0, 1, 0, 1, 0, 1)$

Pelos resultados já vistos, temos que G_1 tem n D-autovalores simples e -1 é um deles.
2° caso: n ímpar, $\xi = \frac{n-1}{2}$. Temos duas possibilidades para o traço: $\tau = \xi$ ou $\tau = \xi + 1$.

- n ímpar, $\xi = \frac{n-1}{2}$ e $\tau = \xi$: temos uma família de grafos onde todas as unidades são não consecutivas e em algum momento existem dois zeros consecutivos: $\mathbb{G}_2 = \{G = (\underbrace{0, 1, \ldots, 0, 1}_{2j}, 0, 0, 1, 0, 1, \ldots, 0, 1)$ com $0 \leq j < \tau\}$. Pelos resultados anteriores, o grafo $G' = (0, 0, 1, 0, 1, \ldots, 0, 1) \in \mathbb{G}_2$ tem n D-autovalores simples e -2 é um deles (caso $j = 0$). Já os demais grafos $G \in \mathbb{G}_2$ e $G \neq G'$ tem n G-autovalores simples com -1 e -2 pertencentes ao seu D-espectro.

  Exemplo 4.2 *O grafo threshold abaixo tem $n = 7$ vértices e $\tau = \xi = 3$.*

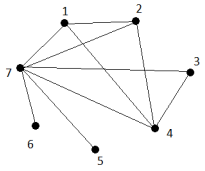


Figura 5: Grafo threshold $G = (0, 1, 0, 1, 0, 0, 1)$

- n ímpar, $\xi = \frac{n-1}{2}$ e $\tau = \xi + 1$: temos uma família de grafos onde todos os zeros são não consecutivos e em algum momento existem duas unidades consecutivas: $\mathbb{G}_3 = \{G = (\underbrace{0, 1, \ldots, 0, 1}_{2j}, 1, 0, 1, \ldots, 0, 1)$ com $1j < \tau\}$. Pelos resultados anteriores, os grafos $G \in \mathbb{G}_3$ tem $n - 2$ G-autovalores simples e -1 é sempre um D-autovalor.

  Exemplo 4.3 *O grafo threshold abaixo tem $n = 7$ vértices, traço $\tau = 4$ e $\xi = 3$.*

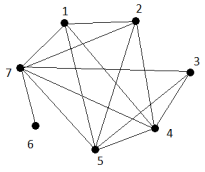


Figura 6: Grafo threshold $G = (0, 1, 0, 1, 1, 0, 1)$

Os grafos *threshold* aqui caracterizados são aqueles que possuem o número máximo de D-autovalores distintos, já que posuem variação binária máxima.

https://proceedings.science/p/85528?lang=pt-br

5. Variação binária como uma ferramenta estrutural

Nas seções anteriores obtivemos as multiplicidades de -1 e -2 como D-autovalores e o número de D-autovalores distintos, a partir da sequência binária do grafo *threshold*.

Veremos agora nos Corolários 5.9 e 5.11 como obter estes mesmos e resultados a partir de parâmetros conhecidos, diretamente do grafo.

Como já mencionamos, um grafo threshold é uma subclasse de grafos cordais (grafos que não possuem C_n como subgrafo induzido, para todo $n \geq 4$), vamos estudar as consequências que esse fato acarreta a um grafo *threshold*. Para isso vamos a algumas definições e resultados:

Definição 5.1 *Blair e Peyton [1993] Um vértice v de G é dito simplicial quando o conjunto de vértices adjacentes a v formam uma clique em G. Denotaremos por $N(v)$ o conjunto de vértices adjacentes a v e por $N[v]$ o conjunto $N(v) \cup \{v\}$. Um subconjunto $C \subset V$ é dito uma clique maximal de G quando C é uma clique e não existe outra clique C' tal que $C \subset C'$.*

O Teorema a seguir liga a noção de vértice simplicial e clique maximal.

Teorema 5.2 *Blair e Peyton [1993] Um vértice é simplicial em um grafo cordal G se e somente se pertence a exatamente uma clique maximal de G.*

Uma clique de um grafo é dita clique *simplicial* quando é uma clique maximal que contém pelo menos um vértice simplicial.

Definição 5.3 *Blair e Peyton [1993] Um subconjunto $S \subset V$ é um separador de vértices para vértices não adjacentes u e v (um uv-separador) se a remoção de S do grafo separa u e v em duas componentes conexas distintas. Se nenhum subconjunto próprio de S é um uv-separador então S é um uv-separador minimal. Se S é um uv-separador minimal para algum par de vértices u e v qualquer, ele é chamado de separador minimal de vértices.*

Usaremos mais dois resultados sobre grafos cordais:

Teorema 5.4 *Blair e Peyton [1993] Um grafo G é cordal se e somente se todo separador minimal de vértices é uma clique.*

Teorema 5.5 *Blair e Peyton [1993] Um conjunto S é um separador minimal de vértices de um grafo cordal G se e somente se existem cliques maximais C e C' de G tais que $S = C \cap C'$.*

Exemplo 5.6 *Retomemos o exemplo de grafo threshold da Figura 7.*

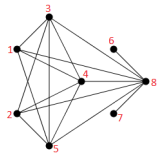


Figura 7: Grafo threshold $(0, 0, 1, 1, 1, 0, 0, 1)$

Os vértices 1, 2, 6 *e* 7 *são vértices simpliciais,* $\{1, 3, 4, 5, 8\}$, $\{2, 3, 4, 5, 6, 8\}$, $\{6, 8\}$ *e* $\{7, 8\}$ *formam cliques maximais e* $\{3, 4, 5, 8\}$ *e* $\{8\}$ *são os separadores minimais de vértices de* G.

https://proceedings.science/p/85528?lang=pt-br

Nesta seção relacionamos a variação binária com o número de separadores minimais de vértices de um grafo *threshold*, para isso expomos alguns resultados obtidos nesses trabalho.

Proposição 5.7 *Os vértices correspondentes aos zeros de um grafo threshold são vértices simpliciais de G.*

Demonstração: De fato, se v_i corresponde a $b_i = 0$ na sequência binária de um grafo threshold G, então $N(v_i) = \{v_j | b_j = 1 \text{ e } i < j\}$ forma uma clique por definição de vértices dominante. Assim v_i é simplicial. ∎

Observemos que o único vértice que sempre é simplicial em um grafo *threshold* é o v_2, pois se $b_2 = 1$ temos que $N(v_2) = \{v_1\} \cup \{v_i | b_i = 1, i > 2\}$ que é uma clique. Nesse caso, e no caso que $b_2 = 0$ recaímos no caso da Proposição acima.

Observemos que a única maneira de uma clique maximal de um grafo *threshold* possuir dois vértices simpliciais é se $b_2 = 1$, a saber, a clique maximal $N[v_1] = N[v_2]$.

Seja v_i um vértices simplicial de G e $N[v_i]$ a clique maximal que contém v_i. Se $i = 1$ com $b_2 = 1$ então $N[v_1] \cap N[v_j] = N(v_j)$ para todo v_j vértice simplicial diferente de v_1 e v_2. Se v_i e v_j são vértices simpliciais e não existe k entre i e j tal que $b_k = 1$ então $N[v_i] \cap N[v_j] = N(v_i) = N(v_j)$. Por fim, se v_i e v_j são vértices simpliciais e existe k tal que $i < k < j$ com $b_k = 1$ então $N[v_i] \cap N[v_j] = N(v_j)$.

Como podemos notar até aqui, muitos resultados apresentados dependem do fato de b_2 ser igual a 1 ou 0. O próximo teorema apresenta o que muda na estrutura do grafo nestes dois casos: a quantidade de separadores minimais de vértices.

Teorema 5.8 *Seja $G = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ um grafo threshold diferente do grafo completo com variação binária ξ. Então o número de separadores minimais de vértices de G é $\xi - b_2$.*

Demonstração: Pelo Teorema 5.5 temos que os separadores minimais de vértices são interseção de cliques maximais e por definição as cliques maximais de um grafo threshold são dadas por $N[v_i]$ tais que v_i são vértices simpliciais de G. Pelo estudo feito anteriormente, cada sequência de zeros da sequência binária determina um separador minimal de vértices diferente, exceto, $N(v_1)$ no caso em que $b_2 = 1$ pois, nesse caso, $N(v_1)$ não é interseção de cliques maximais. Como por definição de variação binária temos ξ sequências de zeros na sequência binária então:

- Se $b_2 = 1$, temos ξ sequências de zeros que definem $\xi - 1$ separadores minimais de vértices de G.
- Se $b_2 = 0$, temos ξ sequências de zeros que definem ξ separadores minimais de vértices de G.

∎

Observemos que, segundo a notação usada para quantificar as sequências de zeros e uns da sequência binária, temos que se v_{i_k} é um vértice simplicial de um grafo *threshold* G então $|N(v_{i_k})| = \sum_{j=i_k}^{\xi} s_j$. E ainda, se v_i e v_j são vértices simpliciais tais que $i < j$ e $N(v_i) \neq N(v_j)$ então $N(v_i) \supset N(v_j)$, ou seja, os separadores minimais de vértices formam uma cadeia decrescente de cliques, pelo Teorema 5.4.

Com o Teorema 2.3 e o Teorema 5.5 podemos enunciar os seguintes corolários que relacionam a estrutura do grafo com seu D-espectro:

Corolário 5.9 *Seja G um grafo threshold com n vértices, número clique ω e $\mathbf{s}$ separadores minimais de vértices, então -1 é um D-autovalor de G com multiplicidade $\omega - \mathbf{s} - 1$.*

https://proceedings.science/p/85528?lang=pt-br

Demonstração: Basta usar o Teorema 2.3 e o Teorema 5.5 e o fato de o traço ser igual ao número clique menos um. ∎

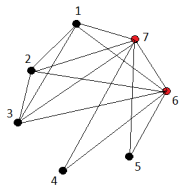


Figura 8: Grafo threshold G

Exemplo 5.10 *G é um grafo threshold com 7 vértices. A maior clique de G é formada pelos vértices $\{1, 2, 3, 6, 7\}$, portanto, $\omega = 5$. O separador minimal de vértices de G é dado pelo conjunto de vértices $\{6, 7\}$, pois ao retirar do grafo tais vértices temos que os vértices $1, 2$ e 3 estão em componentes conexas distintas dos vértices 4 e 5. Então $\mathbf{s} = 1$. Pelo Corolário 5.9, temos que $m_D(-1) = 5 - 1 - 1 = 3$. De fato, pois o D-espectro de G é, aproximadamente, dado por $Spec_D(G) = (8.26352, -0.33002, -1^3, -2, -2.9335)$.*

Corolário 5.11 *Seja G um grafo threshold com $\mathbf{s}$ separadores minimais de vértices. Então o número de D-autovalores distintos de G é no mínimo $2\mathbf{s}$ e no máximo $2\mathbf{s} + 2$.*

Demonstração: Basta usar o Teorema 5.5 e o Corolário 2.6, considerando $b_2 = 0$ e $b_2 = 1$. ∎

Referências

Aouchiche, M. e Hansen, P. (2014). Distance spectra of graphs: A survey. *Linear Algebra and its Applications*, 458:301–386.

Blair, J. R. e Peyton, B. (1993). An introduction to chordal graphs and clique trees. In *Graph theory and sparse matrix computation*, p. 1–29. Springer.

Jacobs, D. P., Trevisan, V., e Tura, F. C. (2013). *Distance eigenvalue location in threshold graphs*. PhD thesis.

M. D. Konig, M. N., S. Battiston e Schweitzer, F. (2012). The efficiency and stability of red networks. *Games and Economic Behavior*, 75:694–713.

Mahade, N. V. R. e Peled, U. N. (1995). Threshold graphs and related topics. *Ann Disc. Maths*, 56.

Sciriha, I. e Farrugia, S. (2011). On the spectrum of threshold graphs. *ISRN Discrete Mathematics*.

Stevanovic, D. e Indulal, G. (2009). The distance spectrum and energy of the compositions of regular graphs. *Applied Mathematics Letters*, 22:1136–1140.

https://proceedings.science/p/85528?lang=pt-br