

A Complexidade do Reconhecimento de Grafos B_1 -EPG-Helly

Claudson Bornstein

Universidade Federal do Rio de Janeiro, IM/UFRJ

cfb@dcc.ufrj.br

Tanilson Santos

Universidade Federal do Rio de Janeiro, PESC/COPPE/UFRJ

Universidade Federal do Tocantins - UFT

tanilson.dias@uft.edu.br

Uéverton Souza

Universidade Federal do Fluminense, IC/UFF

ueverton@ic.uff.br

Jayme Szwarcfiter

Universidade Federal do Rio de Janeiro, PESC/COPPE e IM - UFRJ

Universidade do Estado do Rio de Janeiro, IME/UERJ

jayme@cos.ufrj.br

RESUMO

Golumbic, Lipshteyn e Stern definiram em 2009 os grafos EPG, uma classe de grafos de intersecção baseada na intersecção de arestas de caminhos em uma grade. Um grafo EPG G é um grafo que admite um esquema de representação onde seus vértices são representados por caminhos de uma grade Q , de tal forma que dois vértices em G são adjacentes se e somente se seus caminhos correspondentes em Q possuem arestas em comum. Quando tais caminhos em Q possuem no máximo k mudanças de direção (dobras), dizemos que esta é uma representação B_k -EPG. Uma coleção C de conjuntos satisfaz a propriedade Helly quando toda subcoleção de C que é mutuamente intersectante possui pelo menos um elemento comum. Neste trabalho mostramos que o reconhecimento de grafos que admitem representação B_1 -EPG satisfazendo a propriedade Helly é NP-difícil.

PALAVRAS CHAVE. Complexidade, Dobra Simples, EPG, Grafos de Intersecção, Helly.

TAG - Teoria e Algoritmos em Grafos

ABSTRACT

Golumbic, Lipshteyn and Stern defined in 2009 the EPG graphs, an intersection graph class based on edge intersection of paths on a grid. An EPG graph G is a graph that admits a representation scheme where its vertices are represented by paths in a grid Q , such that two vertices of G are adjacent if and only if their corresponding paths in Q have a common edge. If the paths in Q have at most k changes of direction (bends), we say that this is a B_k -EPG representation. A collection C of sets satisfies the Helly property when every sub-collection of C that is pairwise intersecting has at least a common element. In this paper we show that the problem of recognizing B_1 -EPG graphs that satisfy the Helly property is NP-hard.

KEYWORDS. Complexity, Single Bend, EPG, Intersection Graphs, Helly.

TGA - Theory and Graph Algorithms

1. Introdução

Um grafo EPG G é um grafo que admite um esquema de representação onde seus vértices são representados por caminhos de uma grade Q , de tal forma que dois vértices em G são adjacentes se e somente se os caminhos correspondentes em Q possuem arestas em comum. O estudo de grafos EPG tem motivação prática relacionada ao problema de *layout* de circuitos digitais, que podem ser representados como caminhos em uma grade ortogonal retangular.

Todo grafo G possui uma representação EPG, onde cada vértice v é representado como um caminho $p(v)$ e dois vértices u, v são adjacentes se e somente se $p(u) \cap p(v) \neq \emptyset$, ver [Golumbic et al., 2009]. Um grafo possui uma representação B_k -EPG se existe uma representação para o grafo na qual cada caminho tem no máximo k dobras.

Algumas classes de grafo possuem representação EPG bem conhecidas, como os grafos de intervalo, que são equivalentes a B_0 -EPG; a classe das árvores, que estão em B_1 -EPG; a classe dos grafos outerplanar, que estão em B_2 -EPG; e a classe dos grafos planares que estão em B_4 -EPG.

A classe de grafos EPG tem sido estudada por diversos pesquisadores, atualmente, como [Ries, 2009; Alcón et al., 2016; Cohen et al., 2014], entre outros. Essas pesquisas abordam com frequência caracterizações com relação a quantidade de dobras na representação dos grafos. Com relação à dificuldade de reconhecimento, somente 3 classes de grafos EPG estão mapeadas B_0 -EPG, B_1 -EPG [Heldt et al., 2014] e mais recentemente B_2 -EPG [Martin Pergel, 2017], sendo somente B_0 -EPG reconhecido em tempo polinomial, pois como dito anteriormente, é equivalente à classe de grafos de intervalo, ver [Booth e Lueker, 1976]. A título de exemplo, a Figura 1(a) esboça o grafo C_3 , na Figura 1(b) é exibida uma representação EPG onde os caminhos não possuem dobra, na Figura 1(c) uma representação com 1 dobra e na Figura 1(d) uma representação onde todo caminho possui no máximo 2 dobras.

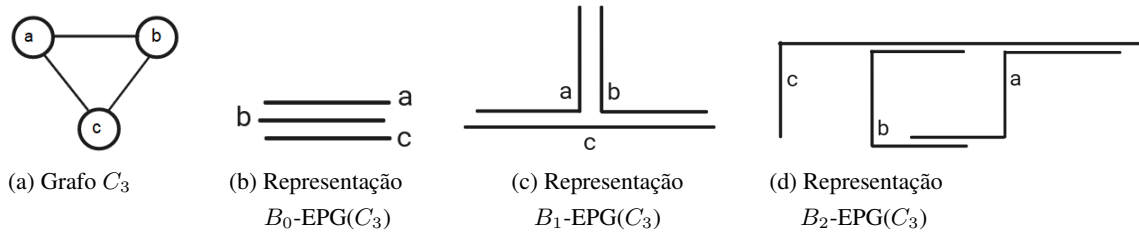


Figura 1: Grafo C_3 e algumas de suas representações sem dobra, com 1 dobra e com 2 dobras

Uma coleção C de conjuntos satisfaz a *propriedade Helly* quando toda subcoleção de C que é mutuamente intersectante possui pelo menos um elemento comum. A *propriedade Helly* tem esse nome em homenagem ao grande matemático austríaco Eduard Helly, que em 1923 propôs seu famoso teorema a respeito do relacionamento de conjuntos intersectantes.

O estudo da propriedade Helly mostra-se útil nas mais diversas áreas da ciência, das quais, atualmente, pode-se enumerar aplicações em semântica, teoria de códigos, biologia computacional, banco de dados, processamento de imagens, teoria dos grafos, otimização, e programação linear [Dourado et al., 2009].

Observe que a representação da Figura 1(b) satisfaz a propriedade Helly, enquanto as representações das Figuras 1(c) e 1(d) não satisfazem.

Este trabalho trata de um estudo sobre grafos de intersecção de arestas em grade que possuem a propriedade Helly em sua representação. Nossa contribuição é apresentar uma prova da NP-dificuldade relacionada ao reconhecimento de grafos B_1 -EPG-Helly. Definições complementares ao entendimento deste trabalho podem ser encontradas em seção de Apêndice.

2. As classes B_1 -EPG e B_1 -EPG-Helly

Embora as classes B_1 -EPG e B_1 -EPG-Helly não coincidam, o mesmo não ocorre entre as classes B_0 -EPG e B_0 -EPG-Helly que coincidem, como observado no Lema 1.

Lema 1. *Toda representação B_0 -EPG satisfaz a propriedade Helly.*

Demonstração. Suponha por absurdo que existe uma grafo G que admite uma representação B_0 -EPG que não satisfaz a propriedade Helly. Então, essa representação possui uma coleção minimal $P = \{p(v_1), p(v_2), \dots, p(v_k)\}$ de caminhos mutuamente intersectantes tal que

$$p(v_1) \cap p(v_2) \cap \dots \cap p(v_k) = \emptyset, \text{ e } k \geq 3.$$

Por minimalidade, sabemos que $\bar{P}_1 = P \setminus \{p(v_1)\}$, $\bar{P}_2 = P \setminus \{p(v_2)\}$ e $\bar{P}_3 = P \setminus \{p(v_3)\}$ são mutuamente intersectantes e satisfazem a propriedade Helly. Sendo assim, existem os seguintes segmentos distintos $s_{\bar{P}_1}, s_{\bar{P}_2}, s_{\bar{P}_3}$ associados a intersecção dos caminhos em $\bar{P}_1, \bar{P}_2$ e $\bar{P}_3$. Como a representação não possui caminhos com dobras, então sabemos que os caminhos em P estão na mesma reta. Sem perda de generalidade, podemos assumir que $s_{\bar{P}_1}, s_{\bar{P}_2}$ e $s_{\bar{P}_3}$ ocorrem da esquerda para a direita nesta ordem. Como $s_{\bar{P}_3}$ e $s_{\bar{P}_1}$ intersectam $p(v_2)$, e $p(v_2)$ é um caminho sem dobra, então $p(v_2)$ intersecta $s_{\bar{P}_2}$. Logo temos um absurdo, pois $s_{\bar{P}_2}$ intersecta todos os caminhos em P , contradizendo a hipótese de $p(v_1) \cap p(v_2) \cap \dots \cap p(v_k) = \emptyset$. $\square$

Corolário 2. *A classe de grafos B_0 -EPG coincide com a classe B_0 -EPG-Helly.*

Apesar de o problema de reconhecimento de grafos B_1 -EPG ser sabidamente NP-completo [Heldt et al., 2014], grafos B_1 -EPG-Helly formam uma subclasse propriamente contida em B_1 -EPG, ver Figura 2, e a complexidade de seu reconhecimento encontra-se em aberto. A classe de grafos B_0 -EPG é equivalente à classe de grafos de intervalo. O problema de reconhecimento de grafos de intervalo pode ser efetuado de forma eficiente em tempo linear [Booth e Lueker, 1976].

O Lema 5 mostra que as classes B_1 -EPG e B_1 -EPG-Helly são distintas, observando o grafo octaedro O_3 , ver Figura 4(a), que invariavelmente apresenta estrutura única, a menos de isomorfismos, como da Figura 4(b) para sua representação. O grafo octaedro O_3 pertence a B_1 -EPG mas não pertence a B_1 -EPG-Helly.

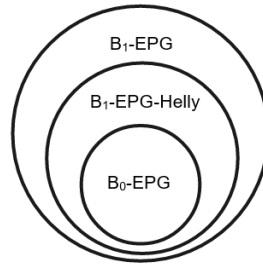


Figura 2: Diagrama hierárquico entre algumas classes EPG.

Pelos resultados de [Golumbic et al., 2009], na Definição 3, todo ciclo induzido de tamanho 4 em uma representação B_1 -EPG(C_4) possui o formato de uma moldura/quadro (frame), torta verdadeira (true pie) ou torta falsa (false pie), ver Figura 3.

Definição 3. [Golumbic et al., 2009] *Dada uma coleção de caminhos $P = \{p_1, \dots, p_4\}$ de uma grade Q em uma representação B_1 -EPG do grafo G . Considere um subgrafo 4-estrela de Q cujo centro está posicionado sobre o ponto b e as arestas $(a_1, b), (a_2, b), (a_3, b), (a_4, b)$, tomadas em sentido horário. Defina-se:*

- Uma torta verdadeira é uma 4-estrela onde cada segmento $(a_i, b) \cup (a_{i+1}, b)$, para $1 \leq i \leq 4$, é um membro diferente de P , onde adicionalmente é assumido ser módulo 4. Todos os 4 caminhos de G fazem dobra em b .

- Uma torta falsa é uma 4-estrela onde cada segmento $(a_1, b) \cup (a_2, b); (a_2, b) \cup (a_4, b); (a_4, b) \cup (a_3, b); (a_3, b) \cup (a_1, b)$, para $1 \leq i \leq 4$, é um membro diferente de P . Na torta falsa, somente 2 caminhos, não adjacentes entre si, fazem dobra em b .
- Considerando um retângulo de qualquer tamanho com 4 cantos $(x_1, y_1); (x_2, y_1); (x_2, y_2); (x_1, y_2)$. Um quadro ou moldura é um retângulo em que em cada canto está uma dobra diferente para cada membro de $p_1, \dots, p_4 \in P$. Os subcaminhos $p_1 \cap p_2, p_2 \cap p_3, p_3 \cap p_4, p_4 \cap p_1$, compartilham pelo menos uma aresta. Enquanto os subcaminhos $p_2 \cap p_4$ e $p_1 \cap p_3$ não compartilham aresta.



Figura 3: Representação B_1 -EPG de ciclo de tamanho 4: moldura (à esquerda), torta verdadeira (centro) e torta falsa (direita), Golumbic et al. [2009].

Lema 4. [Golumbic et al., 2009] Dada uma coleção de caminhos $P = \{p_1, \dots, p_4\}$ de uma grade Q em uma representação B_1 -EPG do grafo G . Todo C_4 induzido em G corresponde, em qualquer representação, a uma torta verdadeira, a uma torta falsa ou a uma moldura.

Demonstração. Dado $C_4 = (v_1, v_2, v_3, v_4)$ que seja um ciclo sem cordas em G . Dado p_i o caminho em G correspondendo a v_i . Suponha que $\bigcap_{p_i \in P} p_i \neq \emptyset$, então claramente $\bigcap_{p_i \in P} p_i = b$, para algum ponto b da grade. Como cada vértice no C_4 possui exatamente 2 vizinhos, cada caminho p_i contém exatamente duas arestas da grade com ponto final b . Assim, obtemos um subgrafo estrela com ponto central b e arestas $(a_1, b), (a_2, b), (a_3, b), (a_4, b)$. Sem perda de generalidade, p_1 contém as arestas $(a_1, b), (a_2, b)$ da grade. Se p_2 contém $(a_2, b), (a_3, b)$ ou $(a_1, b), (a_4, b)$, então obtemos uma torta verdadeira. Caso contrário, p_2 contém as arestas $(a_2, b), (a_4, b)$ ou $(a_1, b), (a_3, b)$ e obtemos uma torta falsa.

Caso contrário, $\bigcap_{p_i \in P} p_i = \emptyset$. Suponha que p_1 é um caminho sem dobras. Cada um dos caminhos p_2 e p_4 compartilham uma aresta com p_1 mas não compartilham aresta comum com nenhum outro caminho. Se nem p_2 nem p_4 possuem dobra, então obtemos uma representação de intervalo de $C_4 - v_3$. Todavia não é possível adicionar um caminho p_3 com no máximo uma dobra. Analogamente, se p_2 e p_4 possuem dobra simples, o caminho p_3 também não pode ser adicionado. Portanto, p_1 possui dobra simples.

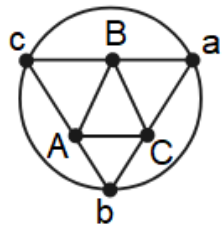
Por simetria, assumimos que todo p_i deve possuir uma dobra simples. Além disso, dois caminhos não podem ter dobra no mesmo ponto da grade. Assim, obtemos um subgrafo retângulo com ângulos em $(x_1, y_1), (x_2, y_1), (x_2, y_2), (x_1, y_2)$, onde p_1 faz dobra em (x_1, y_1) , p_2 faz dobra em (x_2, y_1) , p_3 faz dobra em (x_2, y_2) , e p_4 faz dobra em (x_1, y_2) , formando uma moldura. $\square$

O octaedro é um poliedro de oito faces que pode ser representado como na Figura 4(a).

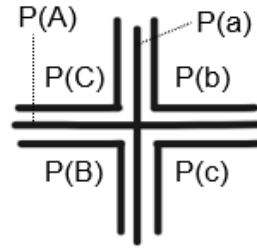
Lema 5. O grafo octaedro O_3 possui representação B_1 -EPG(O_3) única, a menos de isomorfismos.

Demonstração. O grafo octaedro O_3 possui em sua constituição ciclos induzidos de tamanho 4 (C_4). As estruturas de representação do B_1 -EPG(C_4) são conhecidas na literatura e já foram apresentadas anteriormente. Tome um subgrafo C_4 induzido qualquer do octaedro O_3 , os dois vértices que sobram são gêmeos falsos cuja vizinhança são todos os vértices tomados para o C_4 induzido. Dessa forma, se em uma representação B_1 -EPG(C_4), o grafo C_4 for representado como moldura, nenhum caminho, em representação de dobra simples, pode ser simultaneamente intersectante aos 4 caminhos que representam os vértices do C_4 induzido, pois esses caminhos possuem dobras em locais distintos. Logo, concluímos que a estrutura moldura não pode fazer parte da representação do octaedro O_3 .

Com o mesmo raciocínio, tome uma representação B_1 -EPG(C_4) onde o subgrafo C_4 induzido é representado como torta verdadeira ou torta falsa. Ao adicionar os vértices gêmeos falsos, que são vizinhos de todos os vértices do C_4 tomado de O_3 , ambas representações convergem para a estrutura representada na Figura 4(b). $\square$



(a) Grafo octaedro O_3



(b) Representação B_1 -EPG(O_3)

Figura 4: Grafo octaedro O_3 e sua representação B_1 -EPG, Heldt et al. [2014]

Pelo Lema 5 o grafo octaedro O_3 , da Figura 4(a), é isomorfo, em qualquer representação B_1 -EPG, à representação da Figura 4(b). Pela Figura 4(b) podemos observar que, por exemplo, os caminhos $p(a)$, $p(b)$ e $p(c)$ formam uma estrutura que não satisfaz a propriedade Helly. Por essa observação e da informação mostrada no Lema 5 segue o seguinte Corolário 6.

Corolário 6. A classe B_1 -EPG-Helly é subclasse própria de B_1 -EPG.

3. Apresentação dos problemas abordados

Neste trabalho estamos interessados em caracterizar a complexidade do problema de reconhecimento de grafos B_1 -EPG-Helly, cuja definição formal é apresentada a seguir:

RECONHECIMENTO DE GRAFOS B_1 -EPG-HELLY	
<i>Instância:</i>	Um grafo G .
<i>Objetivo:</i>	Determinar se existe um conjunto de caminhos de dobra simples $P = \{p_1, p_2, \dots, p_n\}$ em uma grade Q representando $V(G)$ tal que: $u, v \in V(G)$ são adjacentes em G se e somente se p_u, p_v são intersectantes em Q; P satisfaz a propriedade Helly.

Neste trabalho iremos demonstrar que o reconhecimento de grafos B_1 -EPG-Helly é NP -difícil. Para demonstrar que o reconhecimento de grafos B_1 -EPG-Helly é NP -difícil iremos utilizar uma redução a partir do problema (1 EM 3)-3SAT POSITIVO definido a seguir:

(1 EM 3)-3SAT POSITIVO é um problema sabidamente NP -completo (ver [Garey e Johnson, 1979], problema [L04], página 259). De fato, (1 EM 3)-3SAT POSITIVO permanece NP -completo mesmo quando o grafo de incidência da fórmula CNF de entrada é um grafo planar [Mulzer e Rote, 2008].

(1 EM 3)-3SAT POSITIVO

<i>Instância:</i>	um conjunto X de variáveis; uma coleção C de cláusulas sobre X onde para cada $c \in C$, c possui apenas literais positivos e $ c \leq 3$.
<i>Objetivo:</i>	Determinar se existe uma atribuição de valores para as variáveis em X de forma que toda cláusula em C possui exatamente um literal verdadeiro.

Nosso objetivo nesse trabalho é a partir de uma instância F de (1 EM 3)-3SAT POSITIVO, apresentar a construção em tempo polinomial de um grafo G_F de tal forma que G_F é B_1 -EPG-Helly se e somente se F é satisfatível. Esse grafo irá conter um subgrafo induzido G_c com 12 vértices (denominado *dispositivo cláusula*) para toda cláusula $c \in C$, e um subgrafo induzido (*dispositivo variável*) contendo um vértice especial v_j para toda variável x_j , além de um *dispositivo base* com 55 vértices adicionais.

4. Dispositivo cláusula

Utilizaremos um grafo isomorfo ao grafo H , da Figura 5, como dispositivo para efetuar a demonstração. O dispositivo será utilizado no raciocínio desenvolvido desse ponto em diante. Utilizaremos alguns grafos G_c isomorfos a H (*dispositivos cláusula*) para representar cláusulas c de F . Este grafo é constituído por formas cuja representação B_1 -EPG é bastante conhecida na literatura: ciclos de tamanho 3 e 4 (respectivamente C_3 , C_4).

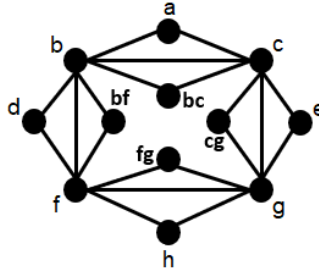


Figura 5: Grafo H

Definição 7. [Golumbic et al., 2009] Seja H o grafo ilustrado na Figura 5. Em toda representação B_1 -EPG de H , onde $H[\{b, c, f, g\}]$ é representado como torta falsa/verdadeira, existe um único ponto da grade, denotado por centro, que está contido em todo caminho que representa os vértices em $\{b, c, f, g\}$.

Definição 8. [Golumbic et al., 2009] Seja H o grafo ilustrado na Figura 5. Em toda representação B_1 -EPG de H , onde $H[\{b, c, f, g\}]$ é representado como torta falsa/verdadeira, denotamos por raio central toda intersecção de aresta entre dois caminhos partindo do centro.

Todas as representações do ciclo de tamanho 4 satisfazem a propriedade Helly. O ciclo de tamanho 3 possui representações B_1 -EPG que satisfazem a propriedade Helly, e.g. a mostrada na Figura 11(b), outras que não satisfazem a propriedade Helly, e.g. a mostrada na Figura 11(a).

O grafo H pode ser visto como uma construção composta pelo $C_4^H = H[b, c, f, g]$ e por oito ciclos de tamanho 3, que são (a, b, c) ; (b, c, bc) ; (c, e, g) ; (c, g, cg) ; (f, g, h) ; (f, g, fg) ; (b, d, f) ; (b, f, bf) .

Como o C_4^H possui representações finitas e conhecidas, como já apresentado na Figura 3, então pode-se iniciar o desenho da representação H - B_1 -EPG(H) a partir dessas estruturas. As Figuras 6(a), 6(b) e 6(c) apresentam 3 possibilidades de representação desse grafo, a menos de

isomorfismos. Apesar de as representações serem construídas somente sobre essas estruturas, a estrutura moldura possui características diferentes das tortas, o que torna menos intuitivo entender sua representação, por isso efetuaremos uma discussão mais detalhada a respeito da representação B_1 -EPG da estrutura moldura na subseção 4.1.

Se o C_4^H é representado por torta, então os caminhos $p(b), p(c), p(f), p(g)$ compartilham um ponto central da representação. Porém se C_4^H é representado por uma moldura, então as dobras dos 4 caminhos correspondentes aos 4 vértices do ciclo formam dobras distintas, i.e. todos caminhos que representam os vértices do C_4^H possuem dobra, ver [Golumbic et al., 2009].

Como todos vértices de H possuem exatamente dois vizinhos em C_4^H , então todos os caminhos em uma representação B_1 -EPG(H) são intersectantes a um par de caminhos na representação B_1 -EPG(C_4^H). Dessa forma, existirão exatamente dois caminhos que interceptam cada par de raios centrais, ver Figuras 6(a) e 6(b).

4.1. O caso especial da estrutura moldura (*frame*)

Por permitir representações assimétricas, diferente do que ocorre com as tortas verdadeira e falsa, a estrutura moldura necessita ser estudada com mais detalhes. A seguir definiremos algumas restrições para que essa estrutura também possa ser utilizada como *dispositivo* na demonstração.

Lema 9. *Todo caminho de uma representação B_1 -EPG(C_4), isomorfa a uma moldura, intersecta exatamente dois caminhos da moldura, sendo uma intersecção vertical e outra horizontal.*

Demonstração. Seja uma representação de moldura que respeita a definição dada por [Golumbic et al., 2009]. Todos caminhos possuem dobra e possuem uma parte na vertical e outra parte na horizontal. Suponha que exista um caminho p_i da moldura que se conecta a outros dois caminhos p_{i-1} e ao p_{i+1} , horizontalmente. Logo temos que p_i, p_{i-1} e p_{i+1} fazem dobra sobre a mesma reta suporte. Mas, por definição de moldura, esses pontos de dobra deveriam ser as extremidades de um retângulo, um absurdo. $\square$

Lema 10. *Dada uma representação B_1 -EPG-Helly de um grafo, onde a representação de um C_4 é isomorfa a uma moldura, se existe um terceiro vértice de G , fora do C_4 , que é adjacente a somente 2 vértices consecutivos do C_4 , então o caminho que representa este vértice compartilha pelo menos uma aresta-intersecção com os caminhos representados pelos vértices aos quais ele é adjacente.*

Demonstração. Sejam p_1 e p_2 caminhos que representam vértices consecutivos do C_4 , em uma representação por moldura e B_1 -EPG-Helly de forma que $p_1 \cap p_2 \neq \emptyset$. Suponha que existe um terceiro caminho, digamos p_x que é adjacente a p_1 e p_2 , porém $p_x \cap (p_1 \cap p_2) = \emptyset$. Se tal situação ocorre, a estrutura não pode ser Helly, um absurdo. $\square$

Pelos lemas 9 e 10 podemos concluir que todo vértice $v_i \in V(H)$ e $v_i \neq V(C_4^H)$, quando utiliza-se moldura para uma representação H - B_1 -EPG(C_4^H), $p(v_i)$ vai possuir pelo menos uma aresta-intersecção em comum ao par de caminhos equivalentes aos vértices de H com os quais v_i é adjacente. A seguir, nas Figura 6(a), Figura 6(b) e Figura 6(c) são apresentadas algumas possíveis representações para H - B_1 -EPG(H).

Todas as representações B_1 -EPG-Helly apresentadas podem sofrer operações de rotação e/ou espelhamento, pois essas operações não alteram a estrutura de representação de intersecção de arestas.

Lema 11. *Dado um Grafo G' composto por um vértice x , dois grafos isomorfos a H , H_1 e H_2 , e um grafo bipartido $K_{2,4}$, onde: x é um vértice do maior conjunto estável do $K_{2,4}$; x é adjacente a um ciclo induzido de tamanho 3 de H_1 , $C_3^{H_1}$; x é adjacente também a outro ciclo induzido de tamanho 3 de H_2 , $C_3^{H_2}$, ver Figura 7(a). Em uma representação de dobra simples as extremidade e a dobra de $p(x)$ são obstruídas, i.e. outro caminho $p(q)$ não pode ser intersectante somente a $p(x)$ pelas extremidades nem pela dobra.*

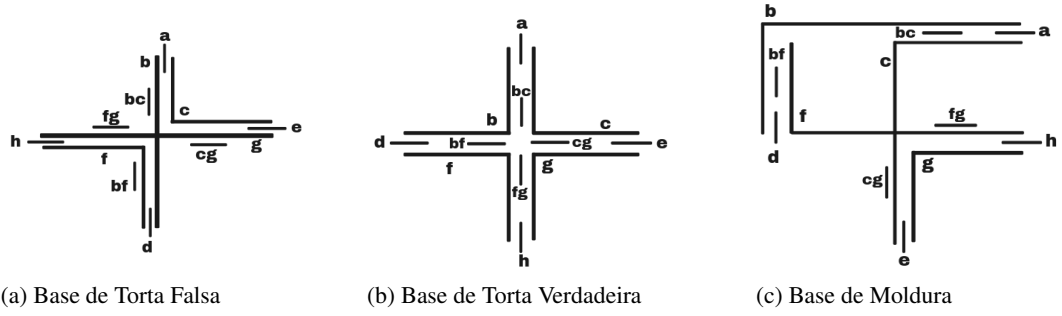


Figura 6: Diferentes representações de dobra simples do grafo H , da Figura 5, de acordo com a estrutura usada para representar o C_4^H

Demonstração. Em qualquer representação de dobra simples de G' acontece o que segue. Como $p(x)$ é parte de maior conjunto estável em $K_{2,4}$ então os caminhos pertencentes ao maior conjunto estável sempre farão dobra em uma torta falsa, mais detalhes em [Asinowski e Suk, 2009], logo $p(x)$ possui uma condição de *dobra obstruída*, ver Figura 7. Como $p(x)$ é adjacente a $C_3^{H_1}$ e $C_3^{H_2}$, então $p(x)$ deve ser adjacentes a ambos caminhos que representam essas triplas de vértices. Pelo Lema 10 e Figura 6 pode-se notar que adjacentes a qualquer par de caminhos do C_4^H existem dois caminhos não intersectantes entre si. Considerando que somente uma das duas triplas de vértices que compartilham o mesmo par de aresta do C_4^H é adjacente a $p(x)$, isso implica que $p(x)$ possui uma condição de *extremidade obstruída*, ver Figura 7.

□

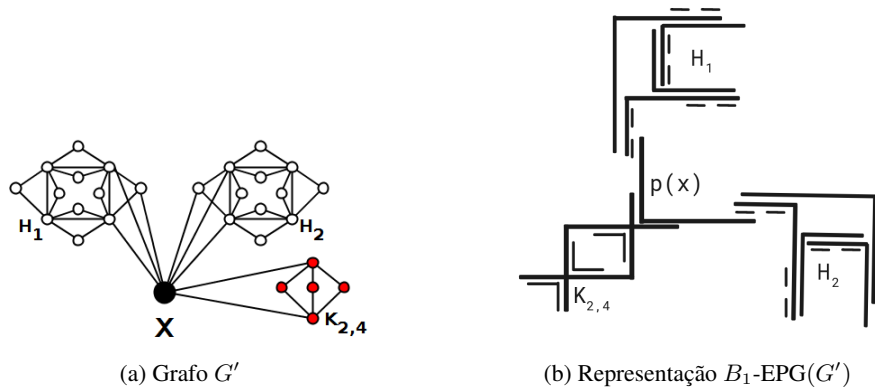


Figura 7: Exemplo de obstrução de extremidade e obstrução de dobra

4.2. A redução do problema

A redução de uma fórmula F de (1 EM 3)-3SAT POSITIVO para um grafo específico G_F que somente possuirá representação H- B_1 -EPG(G_F), se e somente se F é satisfatível é dada a seguir.

1. Para cada cláusula $C_i \in F$ existe um *dispositivo cláusula* G_c , isomorfo ao grafo H , que pode ser desenhado em dobra simples e Helly, com uma das representações estruturais das Figura 6(a), 6(b) ou 6(c) ;
2. Para cada variável x_j existe um vértice v_j que é adjacente a a , e , ou h , vértices de G_c , quando x_j é a primeira, segunda ou terceira variável em C_i , respectivamente;
3. Para cada vértice v_j , são adicionados 2 grafos isomorfos a H , H_1 e H_2 , onde v_j é adjacente a um triângulo mais externo ((a,b,c); (c,e,g); (g,f,h); ou (b,d,f)) de cada H_1 e H_2 ;

4. O subgrafo induzido pelo vértice pivô v_j , por $V(H_1)$ e $V(H_2)$ será denotado como *dispositivo variável*;
5. Existe um vértice V , que servirá de referencial vertical da grade, adjacente a cada vértice $d \in V(G_c)$;
6. Existe um grafo bipartido $K_{2,4}$ com um vértice especificado T da maior parte, chamado de *vértice verdadeiro*. T é adjacente a todo v_j e também é adjacente a V ;
7. Existem dois grafos isomorfos a H , G_{B1} e G_{B2} . O vértice T está conectado aos vértices de um triângulo mais externo ((a,b,c); (c,e,g); (g,f,h); ou (b,d,f)) de cada;
8. Existem mais dois grafos isomorfos a H , G_{B3} e G_{B4} . O vértice V está conectado aos vértices de um triângulo mais externo ((a,b,c); (c,e,g); (g,f,h); ou (b,d,f)) de cada;
9. O subgrafo induzido por $V(K_{2,4})$, T e V , $V(G_{B1})$ e $V(G_{B2})$, e por $V(G_{B3})$ e $V(G_{B4})$ será denotado como *dispositivo base*.

Dada a construção definida anteriormente, para a fórmula $F = (x_1 + x_2 + x_3) \wedge (x_2 + x_3 + x_4) \wedge (x_1 + x_3 + x_4)$, pertencente a (1 EM 3)-3SAT POSITIVO, o grafo G_F ficará como o exibido na Figura 8.

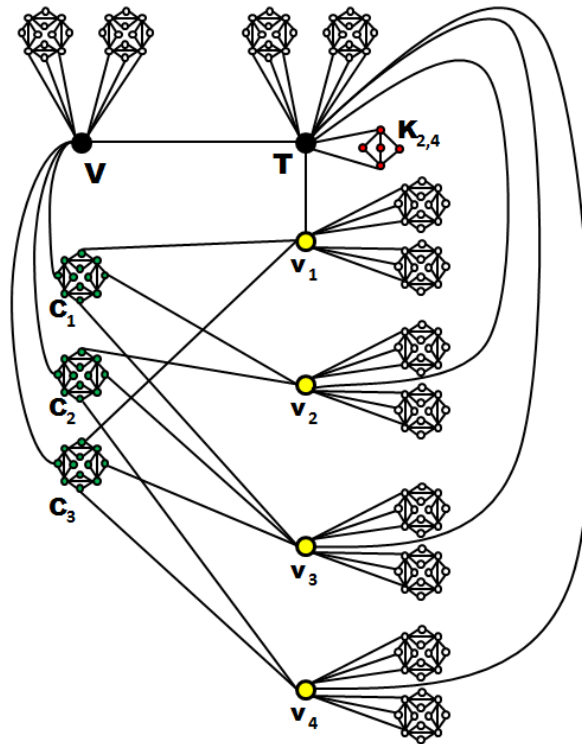


Figura 8: O grafo G_F para a fórmula $F = (x_1 + x_2 + x_3) \wedge (x_2 + x_3 + x_4) \wedge (x_1 + x_3 + x_4)$

A estrutura formada pelo dispositivo base, da qual os vértices T e V fazem parte, fornece uma representação de dobra simples invariável. Nessa estrutura são inseridas as representações de dobra simples das cláusulas da fórmula, i.e. cada G_{c_i} . São também inseridas as representações dos vértices das variáveis de cada cláusula, i.e. cada v_i , de acordo com a ordem que aparecem na cláusula e valor que cada variável pode assumir.

4.3. O Reconhecimento de B_1 -EPG-Helly é NP-difícil

Demonstração. ($\Rightarrow$) Suponha que G_F possui uma representação B_1 -EPG-Helly, R_{G_F} . Sem perda de generalidade, assuma que $p(V) \cap p(T)$ é um segmento horizontal em R_{G_F} . A partir de R_{G_F} iremos construir uma atribuição que satisfaz F da seguinte forma: atribua para cada variável x_j valor verdadeiro se a aresta intersectante entre $p(v_j)$ e $p(T)$ é horizontal e falso caso contrário.

Note que em toda representação de dobra simples de um $K_{2,4}$, o caminho de cada vértice do maior conjunto estável, em particular $p(T)$ aqui, faz dobra em uma torta falsa, explicação consta em [Asinowski e Suk, 2009]. Isso faz com que, inevitavelmente, $p(T)$ seja uma dobra em uma torta falsa de B_1 -EPG($K_{2,4}$).

O vértice verdadeiro T é adjacente aos vértices de um triângulo mais externo de G_{B_1} e G_{B_2} , e como o $K_{2,4}$ está posicionado na dobra de $p(T)$, logo em qualquer representação H - B_1 -EPG(G_{B_1}) e H - B_1 -EPG(G_{B_2}), invariavelmente, devem ser posicionados nos extremos de $p(T)$, ou junto à dobra, ver Lema 11. No caso de a representação Helly do *dispositivo* cláusula ser com base em torta verdadeira ou falsa, existem duas triplas de arestas sobre a mesma reta suporte, isso impede que o dispositivo se posicione em uma parte intermediária de $p(T)$, i.e. deve ficar em uma extremidade, explicação consta na seção 4. Pelo lema 10, sabemos que, se a base de representação do dispositivo for uma moldura, um terceiro vértice adjacente à aresta-intersecção de um C_4 deve compartilhar pelo menos um desses segmentos de intersecção. Dessa forma, como existem dois vértices no *dispositivo* cláusula que compartilham a mesma vizinhança pelo menos um segmento de cada caminho de ambos vértices está sobre a mesma reta suporte, o que impede a moldura de ter um lado completamente contido em um caminho do vértice verdadeiro $p(T)$. Logo, também neste caso o dispositivo cláusula também deve ser posicionado na extremidade do caminho de $p(T)$.

Como tomamos a adjacência entre $p(V)$ e $p(T)$ horizontalmente, então toda intersecção de aresta em $p(V)$, com exceção de $p(T)$, obviamente, é vertical. Como V é adjacente aos vértices do triângulo mais externo em G_{B_3} e G_{B_4} , os dois extremos verticais do segmento de $p(V)$ estão obstruídos por G_{B_3} e G_{B_4} , respectivamente. Assim, o segmento vertical do caminho $p(d)$ para cada *dispositivo* cláusula está completamente contido no segmento vertical de $p(V)$. Nesse momento, os segmentos horizontais de cada $p(d)$, devem estar posicionados de forma a fazer dobra e adjacência com $p(V)$. Consequentemente, se o C_4^H de cada dispositivo cláusula G_c for representado por uma torta verdadeira ou falsa então, dos outros três raios centrais, dois são verticais e um é horizontal. Se o C_4^H do *dispositivo* cláusula G_c for representada por uma *moldura*, como a moldura possui 4 dobras distintas, nas quais cada caminho que forma o C_4^H está posicionado em uma destas dobras, então sempre que $p(d)$ é segmento horizontal, também vão existir dois segmentos que sejam verticais e apenas um outro caminho que também seja horizontal (entre $p(a), p(e), p(h)$), caso contrário a estrutura não seria um *moldura*, ver Lema 9. A consequência dessa estrutura, tanto para as tortas quanto para o *moldura* é que isso gera que em todo *dispositivo* cláusula a aresta-intersecção entre exatamente dois de $\{p(a), p(e), p(h)\}$ e cada $p(v_j)$ relacionado são duas horizontais e exatamente uma é vertical. Em outras palavras, toda cláusula contém, exatamente, uma única variável verdadeira.

Em qualquer atribuição os caminhos representados por $p(a), p(e), p(h)$ devem fazer dobra para que exista intersecção com $p(v_j)$. Cada *dispositivo* variável possui um vértice pivô $p(v_j)$ e dois grafos isomorfos a H com um triângulo mais externo adjacente a v_j , como já foi explicado esses grafos isomorfos a H só podem se conectar em uma extremidade ou dobra de um caminho. Logo, como os caminhos $p(v_j)$ já fazem adjacência com $p(T)$ então uma de suas extremidades já está obstruída. Sobra então para posicionar os grafos isomorfos a H na outra extremidade e na dobra desse caminho. Dessa forma, qualquer outro vértice que seja conectado a $p(v_j)$ deve buscar um espaço intermediário não extremo. Concluimos então que $p(v_j)$ está com dobra e extremidade obstruída.

Como os segmentos $p(a), p(e), p(h)$ estão, obrigatoriamente, dois na vertical e um na horizontal. Levando em consideração que $p(a), p(e), p(h)$ não podem se conectar aos caminhos

das variáveis pelas extremidades, pois essas já estão ocupadas. Considerando, ainda, que pelo lema 10 e pela definição de tortas, $p(a), p(e), p(h)$ não podem ficar inteiramente contidos em algum $p(v_j)$ na mesma direção que ele. Então, necessariamente, $p(a), p(e), p(h)$ devem se conectar a dois caminhos de variáveis com atribuição setada como falsas (que se conectam verticalmente a $p(T)$) e a um caminho de variável com atribuição setada como verdadeira. Caso contrário não existiria R_{G_F} .

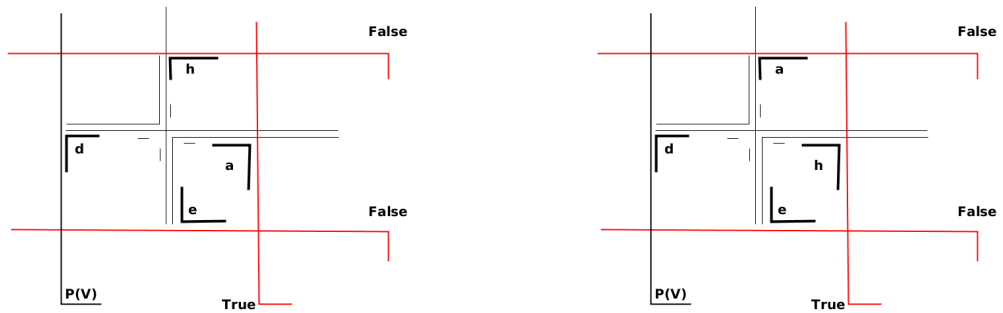
($\Leftarrow$) Dada uma atribuição que satisfaz F , podemos construir R_{G_F} . Primeiro representamos toda estrutura do dispositivo base e dos dispositivos variáveis, relacionada a G_F , com exceção dos *dispositivos cláusulas*, tal construção deve obedecer as restrições apresentadas na subseção 4.2.

Um caminho $p(v_j)$ está conectado ao caminho $p(T)$, pelo vértice verdadeiro T , horizontalmente, se x_j é verdadeiro e verticalmente se x_j é falso.

Sem perda de generalidade e por simplicidade na explicação, vamos utilizar as estruturas torta verdadeira e torta falsa para representar G_C , mas a construção também poderia ser efetuada com a estrutura moldura.

Para entrelaçar um *dispositivo cláusula* G_C , introduzimos uma linha imaginária horizontal l_h na grade entre as linhas horizontais usadas pelos caminhos para as duas variáveis falsas em C . Então conectamos o caminho $p(d)$ de G_C em $p(V)$ verticalmente utilizando a dobra de $p(d)$. Todavia, introduzimos uma linha imaginária vertical l_v na grade, entre a linha vertical da grade usada por $p(V)$ e o caminho para a variável verdadeira em C_j , i.e. entre $p(V)$ e o caminho da variável verdadeira $x_i \in C_j$. Onde l_h e l_v cruzam, introduzir o centro do *dispositivo cláusula* como ilustrado na Figura 10.

Note que existe uma permutação na qual conseguimos representar todas as configurações para $p(a), p(e)$ e $p(h)$, utilizando tortas, com $p(d)$ fixo, tais permutações são apresentadas na Figura 9. Em outras palavras, é possível representar todas combinações de atribuições onde os vértices $p(a), p(e)$ e $p(h)$ estão relacionados com variáveis com uma atribuição satisfável. A Figura 10 ilustra uma disposição para a relação entre os caminhos $p(a), p(e)$, e $p(h)$, e variáveis com valores *False*, *True*, *False*, respectivamente.



(a) $p(e), p(a), p(h)$ conectando-se a variáveis *False*, *True*, *False*, respectivamente

(b) $p(e), p(a), p(h)$ conectando-se a variáveis *False*, *False*, *True*, respectivamente

Figura 9: Representação para diferentes disposições variáveis, utilizando estrutura de torta falsa.

Observe ainda que a representação de dobra simples do *dispositivo* base que utilizamos respeita a propriedade Helly para as arestas. Da mesma forma, a representação de dobra simples do *dispositivo* das cláusulas também respeita a propriedade Helly. Ainda, a representação de dobra simples do conjunto de vértices dos dispositivos variáveis respeita a propriedade Helly. E quando juntamos todas essas representações de subgrafos no grafo da fórmula G_F , este também possui uma

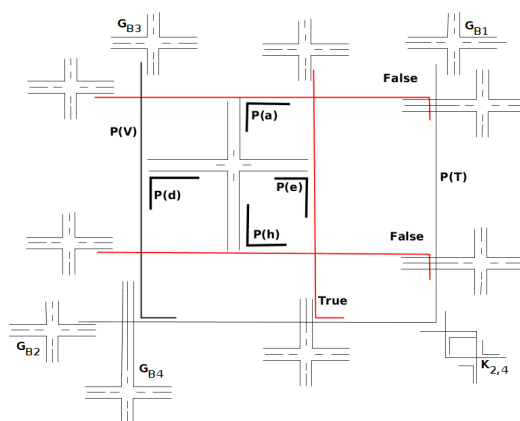


Figura 10: Cláusula *dispositivo* posicionada em uma atribuição satisfável.

representação B_1 –EPG que respeita a propriedade Helly, quando F é satisfável.

Dessa forma mostramos que uma fórmula F pertencente a (1 EM 3)-3SAT POSITIVO, é satisfável se e somente se existir R_{GF} . $\square$

Agradecimentos: O autor 2 agradece o suporte da CAPES que possibilitou o desenvolvimento desse trabalho.

Referências

- Alcón, L., Bonomo, F., Durán, G., Gutierrez, M., Mazzoleni, M. P., Ries, B., e Valencia-Pabon, M. (2016). On the bend number of circular-arc graphs as edge intersection graphs of paths on a grid. *Discrete Applied Mathematics*, 234:12–21.
- Asinowski, A. e Suk, A. (2009). Edge intersection graphs of systems of paths on a grid with a bounded number of bends. *Discrete Applied Math*, 157:3174–3180.
- Booth, K. e Lueker, G. (1976). Testing for the consecutive ones property, interval graphs, and graph planarity using pq-tree algorithms. *Journal of Computer and System Sciences*, 13:335–379.
- Cohen, E., Golumbic, M. C., e Ries, B. (2014). Characterizations of cographs as intersection graphs of paths on a grid. *Discrete Applied Mathematics*, 178:46–57.
- Dourado, M. C., Protti, F., e Szwarcfiter, J. L. (2009). Complexity aspects of the Helly property: Graphs and hypergraphs. *The Electronic Journal of Combinatorics*, 17:1–53.
- Garey, M. R. e Johnson, D. S. (1979). *Computers and Intractability: A Guide to the Theory of NP-Completeness*. W. H. Freeman and Company.
- Golumbic, M., Lipshteyn, M., e Stern, M. (2009). Edge intersection graphs of single bend paths on a grid. *Networks*, 54:130–138.
- Heldt, D., Knauer, K., e Ueckerdt, T. (2014). Edge-intersection graphs of grid paths: the bend-number. *Discrete Appl. Math*, 167:144–162.
- Martin Pergel, P. R. (2017). On edge intersection graphs of paths with 2 bends. *Discrete Applied Mathematics*, 226:106–116.
- Mulzer, W. e Rote, G. (2008). Minimum-weight triangulation is np-hard. *Journal of the ACM (JACM)*, 55(2):11.

Ries, B. (2009). Some properties of edge intersection graphs of single bend paths on a grid. *Electronic Notes in Discrete Mathematics*, 34:29–33.

5. APÊNDICE

5.1. Detalhes complementares

O termo *grade* é usado para denotar o espaço euclidiano de coordenadas ortogonais inteiras. Cada par de inteiros corresponde a uma *coordenada*, a qual, quando conveniente, chamaremos de *vértice* da grade. O termo *aresta* da grade, por sua vez, será utilizado para denotar um par de coordenadas que se encontram a distância de uma unidade. Um *caminho* na grade é qualquer sequência finita de arestas consecutivas da grade. Uma aresta é vertical quando a primeira coordenada dos vértices que a compõe forem iguais, é horizontal caso contrário. Uma *dobra* em um caminho da grade é um par de arestas consecutivas e_1, e_2 desse caminho, tal que direção de e_1 é diferente da direção de e_2 . Um *segmento* da grade é um caminho sem nenhuma dobra. Dois caminhos são ditos *aresta-intersectantes*, ou por simplicidade apenas *intersectantes*, se eles compartilham pelo menos uma aresta da grade, caso contrário, dizemos que eles são *aresta-disjuntos* (ou disjuntos).

EPG é um acrônimo (em inglês, para *Edge-intersection graph of Paths on a Grid*) utilizado para denotar uma classe de grafos de intersecção baseada na intersecção de arestas de caminhos em uma grade. Essa classe, definida em 2009 [Golumbic et al., 2009], consiste na classe dos grafos que admitem um esquema de representação onde seus vértices são representados por caminhos de uma grade Q , de tal forma que dois vértices em G são adjacentes se e somente se seus caminhos correspondentes em Q são intersectantes. Se todo caminho em uma representação pode ser representado com no máximo k dobras, dizemos que este grafo G possui uma *representação* B_k -EPG, indicaremos essa representação pela notação B_k -EPG(G). Quando $k = 1$ dizemos que essa é uma representação de *dobra simples*.

Dois conjuntos, digamos A e B , são *intersectantes* se $A \cap B \neq \emptyset$. Uma *família de conjuntos é dita intersectante* dois a dois, ou mutuamente intersectante, se dados dois conjuntos quaisquer da família, eles são intersectantes. Uma coleção de conjuntos C , não vazios, satisfaz a propriedade Helly quando toda subcoleção intersectante de C possui um elemento em comum.

A propriedade Helly, em conjuntos, pode ser aplicada ao problema de representação B_k -EPG. Um grafo G possui uma representação B_k -EPG-Helly se existe uma representação para este grafo onde cada caminho, que representa um vértice do grafo G , possui no máximo k dobras, e além disso, para todo subconjunto de caminhos mutuamente intersectantes, existe uma aresta comum a todos caminhos deste subconjunto, indicaremos essa representação pela notação H- B_k -EPG(G). A Figura 11 ilustra duas formas de representar um grafo completo com três vértices através de uma representação B_1 -EPG. Na Figura 11(a), apesar dos 3 caminhos serem mutuamente intersectantes, não há uma aresta comum aos três, e portanto eles não satisfazem a propriedade Helly. A Figura 11(b), apresenta 3 caminhos mutuamente intersectantes, contendo uma aresta comum aos caminhos, logo é uma representação B_1 -EPG-Helly válida.

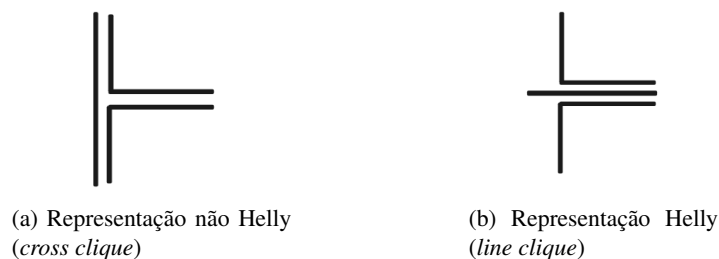


Figura 11: Representações B_1 -EPG de ciclo de tamanho 3