APLICAÇÃO DA DECOMPOSIÇÃO *DANTZIG-WOLFE* EM UM MODELO DE ABASTECIMENTO DE LINHAS DE MONTAGEM

Diego Fernandes Pantuza Moura
Universidade Federal de Minas Gerais
Av. Antônio Carlos, 6627 - Pampulha
CEP: 31270-901 - Belo Horizonte - Minas Gerais - Brasil
diegopantuza06@hotmail.com

Maurício Cardoso de Souza
Universidade Federal de Minas Gerais
Av. Antônio Carlos, 6627 - Pampulha
CEP: 31270-901 - Belo Horizonte - Minas Gerais - Brasil
prof.mauriciodesouza@gmail.com

RESUMO

O presente estudo tem como objetivo abordar o problema de reabastecimento de linhas de montagem. A motivação para o estudo é a situação prática observada numa grande indústria de automóveis localizada no estado de Minas Gerais. Em termos mais específicos, o modelo estudado visa determinar o melhor tamanho de embalagem a ser utilizado para cada item demandado pela linha de montagem dentro de um horizonte de planejamento, com o objetivo de minimizar os custos totais associados. No estudo será aplicado a Decomposição *Dantzig-Wolfe*, com o objetivo de obter limites inferiores melhores para instâncias reais da indústria.

PALAVRAS CHAVE. Decomposição *Dantzig-Wolfe*, Planejamento e controle da produção, Geração de colunas.

Tópicos: L&T – Logística e Transportes.

ABSTRACT

The present study aims to address the problem of refueling assembly lines. The motivation for the study is the practical situation observed in a large automobile industry located in the state of Minas Gerais. In more specific terms, the model studied aims to determine the best packaging size to be used for each item demanded by the assembly line within a planning horizon, in order to minimize the associated total costs. In the study the Dantzig-Wolfe Decomposition will be applied, with the objective of obtaining better lower bounds for real instances of the industry.

KEYWORDS. Dantzig-Wolfe decomposition, Planning and production control, Column generation.

Paper topics: L&T – Logistics and Transport.

https://proceedings.science/p/85500?lang=pt-br

1. Introdução

Em um sistema produtivo, um dos grandes problemas que afetam o planejamento e controle da produção, é a questão de ressuprimento da linha de montagem. A tomada de decisão do tamanho do lote a ser enviado do estoque até a linha deve levar em consideração fatores relacionados aos custos de movimentação e de estoques "lado-linha" de cada um dos componentes do sistema. Os custos de movimentação estão relacionados com o custo de se retirar o item do armazém e levá-lo até a linha de montagem, já os custos com estoque se referem à manutenção de determinado item em estoque na própria linha de montagem, além de possíveis problemas que esse item pode levar para o sistema, pois geralmente as linhas de montagem possuem espaços escassos.

Segundo [Emde e Boysen, 2012], no contexto atual, as empresas estão sofrendo uma certa pressão do mercado para cada vez mais oferecerem uma maior variedade de produtos, sem deixar que isso afete diretamente os custos. Uma das formas de lidar com essa situação é utilizar uma linha de montagem "base" para conseguir produzir uma grande diversidade de produtos, variando apenas as peças que irão abastecer essa linha. [Boysen et al., 2015] citam que as tendências levam a um número crescente de peças e de fornecedores, o que torna ainda mais importante a administração dos processos logísticos.

Devido à complexidade dos processos de produção e a crescente diversificação de produtos nas indústrias, pode ser de grande valia para as organizações buscar a programação matemática como auxílio para a tomada de decisão, de modo a aumentar a eficiência em seus processos industriais padronizados.

Dentre os modelos matemáticos existentes para auxiliar na tomada de decisão, alguns podem levar um tempo elevado até encontrar a solução ótima, especialmente quando precisam analisar instâncias reais, de tamanho elevado. Para lidar com essa situação, existem algumas técnicas de resolução de problemas que visam realizar um tratamento, para que os mesmos tenham a possibilidade de gerar soluções melhores em um menor intervalo de tempo.

Este artigo tem o objetivo de aplicar a decomposição *Dantzig-Wolfe* para o modelo proposto por [de Souza et al., 2008]. A estratégia utilizada será a decomposição dividindo os subproblemas por itens, buscando obter melhores limites inferiores para as instâncias analisadas. Após isso, será feita uma comparação com os resultados obtidos através do *solver* e também com as melhores soluções encontradas até o momento na literatura.

O presente estudo foi conduzido baseado nos dados tratados por [de Souza et al., 2008], oriundos de uma grande indústria automobilística localizada no Brasil. No momento da coleta dos dados a produção média de veículos da organização era de 2300 veículos por dia, possuindo uma parcela de 25,3% do mercado brasileiro.

A seção 2 introduz uma revisão bibliográfica dos tópicos envolvidos no estudo, seguida da seção 3 que aborda a descrição do modelo que foi utilizado como base para a realização do trabalho bem como a contextualização do problema de forma mais detalhada. A seção 4 apresenta a aplicação da técnica de Decomposição *Dantzig-Wolfe*, por fim as seções 5 e 6, apresentam respectivamente, os resultados computacionais obtidos e as conclusões feitas após o estudo.

2. Revisão da literatura

2.1. Logística interna

Diversos estudos já foram realizados envolvendo a abordagem de logística interna em linhas de montagem nas organizações, isso pode ser explicado devido a importância econômica do assunto [Kilic e Durmusoglu, 2015]. O estudo apresentado por [Yano et al., 1998] propõe uma metodologia de criação de docas extras nas plantas das indústrias para receber as mercadorias dos fornecedores, com o objetivo de facilitar o manuseio dos materiais, além de reduzir os custos associados ao transporte. [Kamoun e Yano, 1996] apresentam um algoritmo baseado na decomposição de *Benders* para resolver o mesmo tipo de problema.

Em [Bitran e Chang, 1987], é apresentado um estudo cujo o principal objetivo foi o de auxiliar os gerentes na tomada de decisão relacionada a quantidade de itens que deveria se ter

https://proceedings.science/p/85500?lang=pt-br

em estoque no sistema produtivo. [Fattahi et al., 2011] apresentam um modelo para resolver o problema de linhas de montagem multi-equipadas, onde um grupo de trabalhadores executam simultaneamente mais de uma operação em um mesmo produto final. Para resolver esse problema, os autores propõem uma heurística baseada na abordagem de colônia de formigas para encontrar uma boa solução para a formulação apresentada. As linhas de montagem multi-equipadas podem trazer grandes benefícios para as organizações, porém a sua utilização vem acompanhado de um grande desafio [Battini et al., 2010].

Para lidar com essa situação, [Faccio et al., 2013] fizeram um estudo onde se buscou relacionar os conceitos do sistema *Kanban*, que se caracteriza por ser um sistema que permite maior controle do sistema produtivo em tempo real, com os conceitos de *supermarket*, que é a descentralização dos estoques dentro do sistema de produção, permitindo que se tenha áreas de distribuição de peças mais próximas da linha de montagem, para que assim as peças possam ser entregues de forma mais eficiente, sem que haja interrupções na produção por falta de matéria-prima. Através do alinhamento desses dois conceitos, [Faccio et al., 2013] formularam um modelo com o objetivo de minimizar o custo total de operações, levando em consideração variáveis como o número de operadores necessários, os melhores locais para se instalar os *supermarkets*, e como seria feita a movimentação das peças dentro da linha de montagem.

O conceito de *supermarket* vem ganhando a atenção dos pesquisadores nos últimos anos, e diversas publicações estão tratando o assunto através de diferentes abordagens. [Battini et al., 2009] e [Battini et al., 2010] propõem metodologias para auxiliar na decisão de descentralizar os estoques, definindo a localização e a quantidade necessária de *supermakets* para uma determinada planta de produção.

Alguns estudos já foram realizados se baseando no modelo proposto por [de Souza et al., 2008]. No estudo realizado por [da Cunha e de Souza, 2008] foram realizados testes através da inclusão de desigualdades válidas para o modelo, e por meio dessa reformulação foram realizados experimentos para obter melhores limites inferiores e superiores. No trabalho feito por [Mendonça, 2011] foram realizados alguns testes de reformulações para o modelo, além de apilcar técnicas de *local branching* com o objetivo de alcançar melhores soluções para o modelo analisado.

2.2. Decomposição *Dantzig-Wolfe*

Segundo [Martin, 2012] o método de decomposição Dantzig-Wolfe é considerado o dual da decomposição de *Benders*, enquanto a decomposição de *Benders* divide o problema em dois conjuntos de variáveis, o método de decomposição *Dantzig-Wolfe* busca uma divisão das restrições em dois conjuntos. Em um dos conjuntos ficam as restrições do problema mestre, e no outro ficam as restrições que pertencem ao subproblema com o objetivo de tornar a resolução de problemas de grande escala mais eficiente.

A geração de colunas é um método para resolver o problema mestre gerado pela decomposição de *Dantzig-Wolfe* (DWD). De acordo com [Vanderbeck e Savelsbergh, 2006], sua principal ideia é que apenas os pontos extremos e os raios do subproblema devem ser considerados de modo que se encontre a solução ótima do problema mestre. A inclusão de variáveis é feita iterativamente até que a solução ótima seja obtida para o problema analisado.

Este método pode ser aplicado em diversos tipos de problemas da programação inteira, caso seja aplicado em conjunto com alguma outra técnica. [Vanderbeck, 2000] cita alguns estudos em que se aplicou a geração de colunas, dentre eles estão roteamento de veículos, problemas de atribuição generalizada, e de alocação de embalagens. Em todas essas aplicações o método se mostrou eficiente.

Alguns estudos já foram feitos aplicando DWD em modelos para planejamento e controle da produção, [Pimentel et al., 2010] apresentou um estudo voltado para a aplicação do algoritmo de geração de colunas para o problema de dimensionamento de lotes. No artigo os autores aplicaram o método *Dantzig-Wolfe* de três maneiras diferentes, inicialmente dividindo os subproblemas por itens e depois por períodos. A terceira aplicação foi através do conceito de *Multiple Dantzig-Wolfe*

https://proceedings.science/p/85500?lang=pt-br

Decomposition, onde se tem um problema mestre e um conjunto de subproblemas. Após isso, foi utilizada a técnica *branch and price*, que se caracteriza por ser uma combinação do *branch and bound* com a geração de colunas, e vem sendo muito utilizada para a resolução de problemas de programação inteira.

Em [Peeters e Degraeve, 2006], foi aplicada a DWD em uma formulação para balanceamento de linhas de produção objetivando encontrar melhores limites inferiores para o problema. Em adição, foi aplicado um algoritmo *branch and bound* para se obter uma solução exata para o problema gerado, assim como nos estudos feitos por [Jans e Degraeve, 2004] e [Degraeve e Jans, 2007] onde se aplicou a DWD em um problema de dimensionamento de lotes com tempos de *setup*.

3. Contextualização e definição do modelo

A movimentação dos itens dentro da unidade fabril no contexto estudado, ocorre entre o almoxarifado e a linha de montagem, um item só é enviado até a linha de produção após feita a solicitação ao setor responsável, que fica encarregado de tomar algumas decisões antes de enviá-lo. Entre essas decisões estão a alocação de cada item em um determinado tamanho de embalagem e também o número de embalagens de tamanho específico que serão utilizadas para abastecer a linha em cada período de tempo.

O modelo de distribuição de produtos na linha de montagem com demanda variável foi proposto por [de Souza et al., 2008], com o principal objetivo de auxiliar a tomada de decisão sobre o melhor tamanho de embalagem a ser alocado a cada item para abastecer a linha de montagem de uma unidade de produção, dentro do horizonte de planejamento de forma a minimizar os custos com estoques e transportes.

As restrições presentes no modelo indicam que em todos os períodos as demandas devem ser atendidas, ou seja, o estoque do período anterior somado pela quantidade entregue de peças no período atual deve ser o suficiente para atender a demanda deste período. As demais restrições garantem que cada item será alocado somente em um determinado tamanho de embalagem, e que o limite de embalagens disponíveis deve ser respeitado.

O modelo apresentado por [de Souza et al., 2008] representa uma situação onde a demanda de cada item varia nos períodos analisados, e apesar de ter sido formulado se baseando em uma indústria do setor automobilístico, pode ser aplicado em industrias das mais diversas áreas.

O conjunto I representa os tipos de peças que irão abastecer a linha de montagem, dentro do horizonte de planejamento que é representado por T. O parâmetro de demanda é representado por d_{it} e significa a demanda da peça i no período t. O terceiro conjunto do modelo é representado por K, que define os diferentes tamanhos de embalagens disponíveis. O parâmetro q_{ik} representa o número de peças i que cabem na embalagem de tamanho k, e o custo unitário de se manter uma unidade do item i em estoque é dado por c_i. Já o limite sobre o número de embalagens do tamanho k disponíveis para a movimentação de peças é representado por l_k.

Representando o custo fixo de movimentação da embalagem temos o parâmetro b. Serão realizados testes com o seu valor fixo no horizonte de planejamento (b_k), e também sofrendo uma variação ao longo dos períodos (b_{kt}). Isso foi feito com o objetivo de analisar o comportamento do modelo em diferentes situações.

O número de embalagens de determinado tamanho necessárias para o abastecimento da linha com a peça (w_{ikt}) pode ser calculado utilizando a equação (1), onde r_{ik} representa o *lead time* para o abastecimento da linha com a peça i na embalagem de tamanho k. O *lead time* inclui o tempo para as embalagens serem solicitadas, preenchidas com os itens, transportadas até a linha de montagem, além do processo de higienização e retorno para a área de armazenamento principal, onde ficarão disponíveis novamente para serem reutilizadas.

$$w_{ikt} = \left\lceil \frac{d_{it} r_{ik}}{q_{ik}} \right\rceil \tag{1}$$

https://proceedings.science/p/85500?lang=pt-br

As variáveis de decisão do modelo são:

x_{ik}: Variável binária, que representa as decisões de alocação das peças. Sendo 1 se a linha de montagem for abastecida com a peça i na embalagem de tamanho k, e 0 caso contrário.

f_{ikt}: Variável inteira, que indica a frequência de abastecimento no período t com a peça i na embalagem de tamanho k.

s_{it}: Variável real, que representa o número de peças do tipo i estoque no período t.

A formulação proposta por [de Souza et al., 2008] é apresentada abaixo, acrescentando um refinamento do parâmetro M proposto por [da Cunha e de Souza, 2008]:

Formulação original (D):

$$z_{DI} = \min \sum_{t \in T} \sum_{i \in I} (c_i s_{it} + \sum_{k \in K} b_k f_{ikt}) \tag{2}$$

sujeito a:

$$s_{i(t-1)} - s_{it} + \sum_{k \in K} q_{ik} f_{ikt} = d_{it} \qquad \forall\, i \in I, t \in T \tag{3}$$

$$\sum_{k \in K} x_{ik} = 1 \qquad \forall\, i \in I \tag{4}$$

$$M_{ikt} x_{ik} - f_{ikt} \geq 0 \qquad \forall\, i \in I, k \in K, t \in T \tag{5}$$

$$\sum_{i \in I} w_{ikt} x_{ik} \leq l_k \qquad \forall\, t \in T, k \in K \tag{6}$$

$$x_{ik} \in \mathbb{B} \qquad \forall\, i \in I, k \in K \tag{7}$$

$$s_{it} \geq 0 \qquad \forall\, i \in I, t \in T \tag{8}$$

$$f_{ikt} \in \mathbb{N} \qquad \forall\, i \in I, k \in K, t \in T \tag{9}$$

A função objetivo (2) é composta pelo somatório de todas as peças em conjunto com todo o intervalo de tempo analisado, e possui duas parcelas. A primeira corresponde ao custo de estoque ao lado da linha de produção, já a segunda parcela está relacionada ao custo de transporte das peças do almoxarifado para a linha de montagem.

Em relação as restrições, a equação (3) garante que a demanda ao final de cada período será atendida. A restrição (4) garante que cada peça será alocada somente em um tamanho de embalagem durante todos os períodos. Na restrição (5) o coeficiente M_{ikt} é calculado pela seguinte equação:

$$M_{ikt} = \sum_{u=t}^{T} \left\lceil \frac{d_{iu}}{q_{ik}} \right\rceil \tag{10}$$

Dessa forma, caso a embalagem seja escolhida para transportar a peça para a linha de montagem (isso é, $x_{ik} = 1$), a restrição é satisfeita pois o número de vezes que a linha é abastecida pela embalagem k não pode ser maior do que M_{ikt}. A restrição (6) garante que o número de embalagens utilizadas não vai superar o número disponível de embalagens, e as restrições (7),(8) e (9) representam o domínio das variáveis.

4. Aplicação da técnica Decomposição *Dantzig-Wolfe*

Neste estudo se optou por aplicar a decomposição *Dantzig-Wolfe* objetivando encontrar melhores limites inferiores, para isso se utilizou da estratégia da decomposição por itens, deixando apenas a restrição de limitação de embalagens no problema mestre. As demais restrições foram inseridas no subproblema.

Para definir o problema mestre foram considerados os conjuntos, variáveis, e parâmetros já definidos anteriormente, além disso foi criado um conjunto H que representa as colunas geradas pelo subproblema.

https://proceedings.science/p/85500?lang=pt-br

Os parâmetros relacionados com as variáveis originais do problema, foram obtidos através das equações (11), (12) e (13). A variável λ_r foi criada para garantir que qualquer ponto de um determinado politopo possa ser escrito como uma combinação convexa dos pontos extremos do mesmo. O modelo analisado possui apenas pontos extremos, pois o seu subproblema é limitado, portanto qualquer solução do problema mestre (apresentado abaixo) pode ser expressada como uma combinação linear convexa de pontos extremos dos subproblemas.

$$x_{ik} = \sum_{r \in H} \bar{x}_{ikr} * \lambda_r \tag{11}$$

$$s_{it} = \sum_{r \in H} \bar{s}_{itr} * \lambda_r \tag{12}$$

$$f_{ikt} = \sum_{r \in H} \bar{f}_{iktr} * \lambda_r \tag{13}$$

A restrição (6) foi inserida no problema mestre, que é apresentado abaixo:

Problema Mestre I (MPI):

$$z_{mpI} = \min \sum_{r \in H} \sum_{t \in T} \sum_{i \in I} (c_i \bar{s}_{itr} \lambda_r + \sum_{k \in K} b_k \bar{f}_{iktr} \lambda_r) \tag{14}$$

sujeito a:

$$\sum_{r \in H} \sum_{i \in I} w_{ikt} \bar{x}_{ikr} \lambda_r \leq l_k \qquad \forall\ k \in K, t \in T(\pi_{kt}) \tag{15}$$

$$\sum_{r \in H} \lambda_r = 1, \qquad (\mu_0) \tag{16}$$

$$\lambda_r \geq 0 \qquad \forall\ r \in H \tag{17}$$

A função objetivo (14) busca minimizar os custos, assim como no problema original, a restrição (15) representa o limite de embalagens utilizadas que deverá respeitar o limite disponível, a restrição (16) é a restrição de convexidade, e a restrição (17) representa a não negatividade da variável do problema mestre. As variáveis π_{kt} e μ_0 são as variáveis duais associadas as restrições (15) e (16).

Conforme informado anteriormente, as restrições (3), (4) e (5) foram inseridas no subproblema I, e considerando que π_{kt} é o vetor dual associado com a restrição (15) indexado por k e t. Enquanto μ_0 é a variável dual associada com o conjunto de restrições de convexidade. O subproblema I é apresentado abaixo:

Subproblema I (SPI):

$$z_{spI} = \min \sum_{t \in T} \sum_{i \in I} (c_i s_{it} + \sum_{k \in K} b_k f_{ikt}) - \sum_{i \in I} \sum_{k \in K} \sum_{t \in T} (w_{ikt} \pi_{kt}) x_{ik} - \mu_0 \tag{18}$$

sujeito a:

$$s_{i(t-1)} - s_{it} + \sum_{k \in K} q_{ik} f_{ikt} = d_{it} \qquad \forall\ i \in I, t \in T \tag{19}$$

$$\sum_{k \in K} x_{ik} = 1 \qquad \forall\ i \in I \tag{20}$$

$$M_{ikt} x_{ik} - f_{ikt} \geq 0 \qquad \forall\ i \in I, k \in K, t \in T \tag{21}$$

$$x_{ik} \in \mathbb{B} \qquad \forall\ i \in I, k \in K \tag{22}$$

$$s_{it} \geq 0 \qquad \forall\ i \in I, t \in T \tag{23}$$

$$f_{ikt} \in \mathbb{N} \qquad \forall\ i \in I, k \in K, t \in T \tag{24}$$

Durante o processo de geração de colunas, o subproblema é resolvido através de um *solver*, para analisar se existem planos de alocação de itens a embalagens atraentes. Um plano é considerado atraente se o custo reduzido da função objetivo associada possuir um valor negativo. Em cada iteração são adicionados planos ao problema mestre, até que não haja mais planos atraentes e encontre a solução ótima do problema mestre.

5. Resultados computacionais

Nessa seção, serão apresentados os resultados computacionais obtidos através da aplicação do algoritmo de geração de colunas, utilizando a decomposição *Dantzig-Wolfe* e também os resultados gerados pelo *solver* (*CPLEX 12.6*), limitando o tempo de execução para cada uma das instâncias em 3600 segundos. Além disso será feita uma comparação dos resultados obtidos anteriormente através de outros estudos.

Os experimentos computacionais foram realizados para um conjunto de 48 instâncias reais, com 191 itens, e 3 tipos de embalagens que possuem tamanho diferentes (pequena, média e grande), de uma grande indústria localizada no Brasil. O horizonte de planejamento das operações é composto por 7 períodos, e as decisões do chão de fábrica são tomadas baseadas na demanda diária. As instâncias podem ser divididas em dois grupos, o grupo denominado I, se refere aos dados cujo o custo de movimentação não sofreu nenhuma variação durante o horizonte de planejamento, já o grupo II é mencionado para identificar as instâncias onde ocorre essa variação.

Para a realização dos testes computacionais utilizou-se linguagem de programação AMPL, sendo estes executados em um computador com sistema operacional Linux, com 7.8 GB de memória e processador *Intel Core i7 3.4 GHz*.

Os experimentos foram realizados em diversos cenários diferentes, e são divididos em dois segmentos, as instâncias que iniciam o nome sem o prefixo b, a razão $\frac{l_k}{a_k}$ possui o mesmo valor para cada embalagem k, onde l_k é o percentual do número total a_k de embalagens do tipo k que são necessários para abastecer a linha considerando que apenas as embalagens do tipo k sejam utilizadas. Nas instâncias inicializadas com o prefixo b, a razão $\frac{l_k}{a_k}$ pode variar de acordo com o tipo de embalagem. Dentro de cada segmento foram feitas também variações de acordo com a parametrização da função de demanda diária, políticas de custos de transporte e configurações do parâmetro l_k utilizado na instância.

A tabela 1 apresenta os resultados encontrados para o grupo I de instâncias, foram realizados testes utilizando o *solver* e também a decomposição *Dantzig-Wolfe*. O UB'_I representa a solução encontrada por [da Cunha e de Souza, 2008] através de uma reformulação do modelo, que é a melhor solução viável encontrada até o momento para as instâncias testadas, e serviu como base para a comparação dos limites inferiores encontrados neste estudo. O $GAP_{I-CPLEX}$ se refere a diferença entre a melhor solução inteira e o melhor limite inferior encontrado pelo *solver* após 3600 segundos de execução.

Os valores para GAP_{I-RL} foram calculados através da equação $GAP_{I-RL}(\%) = ((UB'_I - RL_I)/UB'_I) * 100$, onde RL_I representa a relaxação linear para a formulação. De forma análoga, os valores para GAP_{I-DWD} podem ser calculados, apenas substituindo os valores da relaxação linear pela função objetivo encontrada através da geração de colunas. Além disso são apresentados na tabela também o tempo e o número de iterações gastos pelo algoritmo para encontrar a solução ótima para o problema mestre.

A tabela 2 apresenta os resultados obtidos para o grupo II de instâncias, onde o custo de movimentação das embalagens sofreu uma variação ao longo do horizonte analisado. Os valores de UB'_{II} foram encontrados no estudo feito por [Mendonça, 2011], onde se aplicou a abordagem *local branching* para encontrar soluções viáveis para as instâncias.

O tempo para encontrar os valores da RL_I e RL_{II} foi muito próximo de zero para todas as instâncias analisadas. O GAP médio para a relaxação linear das instâncias do grupo I (GAP_{I-RL}) foi de 74%, sendo que em 12 delas superou 80%. Uma situação semelhante acontece para o conjunto de instâncias do grupo II, onde GAP_{II-RL} médio foi menor (37,53%), quando comparado

https://proceedings.science/p/85500?lang=pt-br

ao do grupo I, porém os resultados de ambos mostram uma certa dificuldade da formulação para encontrar a otimalidade das instâncias.

A dificuldade para encontrar a otimalidade pode ser observada por meio da análise dos resultados obtidos através da execução do *solver* com limitação de tempo para as 48 instâncias testadas. Isso se evidencia ainda mais no grupo I, em que 8 das 24 instâncias tiveram o $GAP_{I-CPLEX}$ superior a 70%, com uma média de 32,5% para o conjunto de instâncias desse grupo. Em relação ao grupo II, também houve uma dificuldade em encontrar a otimalidade, porém os valores do $GAP_{II-CPLEX}$ foram inferiores, com uma média de 9%, e com valor abaixo de 16% para 23 das 24 instâncias testadas.

Através da análise dos resultados obtidos para o grupo I, observamos o limite inferior encontrado através da decomposição *Dantzig-Wolfe* foi significativamente superior ao da relaxação linear da formulação. Os GAP's foram calculados utilizando as melhores soluções viáveis encontradas na literatura. A média encontrada para as 24 instâncias foi de 9,52%, e o tempo médio de obtenção desses limites foi de 94,6 segundos. No melhor dos casos o algoritmo precisou de apenas uma iteração para encontrar o valor da função objetivo do problema mestre, com GAP de 6,82%.

A observação dos resultados referentes ao grupo II, geraram resultados ainda mais promissores, onde o GAP_{II-DWD} médio foi de 1,67%, mostrando que os limites encontrados estão extremamente próximos a otimalidade das instâncias. Em 11 das instâncias o GAP_{II-DWD} foi abaixo de 1%, sendo que o melhor dos casos ocorreu na instância $test191_121$, em que atingiu 0,01%.

Por meio de uma análise dos piores casos de ambos os grupos, observamos que mesmo nessas situações os resultados se mostraram promissores. No grupo I, o pior caso ocorreu na instância $btestb191_111$ onde o GAP_{I-DWD} foi de 15,49%, porém não se afastou muito da média do grupo, mostrando uma certa constância de resultados. Uma situação diferente ocorreu nos testes do grupo II, onde o pior dos casos gerou um GAP_{II-DWD} de 8,93%, que pode ser considerado distante da média encontrada para o grupo (1,67%), porém essa distância elevada ocorreu apenas em uma das instâncias, e mesmo no pior caso é considerada bem superior a relaxação linear do modelo.

Tabela 1: Resultados gerados para o grupo I de instâncias

		$Cplex$		DWD_I		
Instância	UB'_I	$GAP_{I-RL}(\%)$	$GAP_{I-CPLEX}(\%)$	$GAP_{I-DWD}(\%)$	$Tempo(s)$	It
$btest191b111$	220235	81,83	73,64	15,49	98	19
$btest191b112$	207971	81,27	70,21	8,73	34	10
$btest191b113$	213953	81,81	19,92	10,44	66	21
$btest191b121$	202148	65,73	13,96	10,58	55	17
$btest191b122$	234213	69,30	1,02	10,93	36	11
$btest191b123$	252720	71,55	4,03	13,05	63	21
$btest191b211$	225353	81,25	83,97	10,48	85	21
$btest191b212$	221008	81,76	21,87	9,41	36	10
$btest191b213$	220534	81,72	84,12	8,25	75	24
$btest191b221$	215095	66,63	15,70	9,84	65	19
$btest191b222$	239685	68,82	1,16	7,47	39	12
$btest191b223$	256420	70,85	82,93	9,32	70	21
$test191-111$	206841	81,12	15,35	10,47	4	1
$test191-112$	203102	80,10	69,94	8,62	31	10
$test191-113$	222904	80,77	84,05	13,65	74	20
$test191-121$	190713	63,68	13,41	6,82	5	1
$test191-122$	192290	63,98	5,58	7,16	38	11
$test191-123$	207914	66,68	6,70	12,07	62	18
$test191-211$	213046	81,02	7,59	8,25	4	1
$test191-212$	210576	80,26	71,92	6,57	33	9
$test191-213$	225963	80,34	11,24	9,30	50	17
$test191-221$	198930	63,92	2,59	5,00	33	10
$test191-222$	199320	63,99	19,48	4,78	37	11
$test191-223$	220180	67,40	1,43	11,69	67	19

https://proceedings.science/p/85500?lang=pt-br

Tabela 2: Resultados gerados para o grupo II de instâncias

		$Cplex$		DWD_{II}		
Instância	UB'_{II}	$GAP_{II-RL}(\%)$	$GAP_{II-CPLEX}(\%)$	$GAP_{II-DWD}(\%)$	$Tempo(s)$	It
$btest191b111$	471283	51,18	4,15	4,95	191	25
$btest191b112$	427580	47,04	3,51	0,19	10	1
$btest191b113$	427646	47,04	7,80	0,20	9	1
$btest191b121$	475095	25,28	66,22	1,47	174	19
$btest191b122$	513017	28,24	6,03	0,19	108	12
$btest191b123$	523746	29,71	8,32	0,19	189	25
$btest191b211$	514226	50,95	11,93	2,66	151	20
$btest191b212$	455319	46,01	4,05	0,53	66	11
$btest191b213$	454341	45,89	8,46	0,39	2	1
$btest191b221$	514031	25,38	9,78	1,19	170	20
$btest191b222$	552175	27,90	2,47	0,09	89	11
$btest191b223$	562702	29,25	9,25	0,20	167	19
$test191-111$	433448	47,64	2,86	1,33	85	11
$test191-112$	449250	48,62	15,94	1,29	110	10
$test191-113$	505124	51,39	14,49	4,83	136	16
$test191-121$	465279	23,70	1,82	0,01	3	1
$test191-122$	474479	25,18	3,60	1,84	111	11
$test191-123$	477283	25,61	3,56	1,14	147	18
$test191-211$	468212	47,41	3,99	2,96	70	11
$test191-212$	477346	47,73	4,59	0,87	62	10
$test191-213$	534720	49,74	12,26	3,61	136	14
$test191-221$	502942	23,73	1,15	0,02	7	1
$test191-222$	552734	30,60	4,94	8,93	91	10
$test191-223$	514787	25,48	7,20	1,06	148	21

6. Conclusões

Neste trabalho foi apresentado um estudo em um modelo matemático de abastecimento de linhas de montagem, objetivando minimizar os custos relacionados com o transporte das peças até a linha de montagem e também os custos de estoques lado-linha. Foi aplicado a decomposição *Dantzig-Wolfe* objetivando encontrar melhores limites inferiores para a formulação. Os testes foram realizados em instâncias reais de uma indústria de automóveis localizada no estado de Minas Gerais.

Os resultados encontrados por meio da técnica podem ser considerados promissores, pois os limites encontrados são superiores a relaxação linear da formulação. Em boa parte das instâncias ficaram bem próximos a melhor solução já encontrada na literatura, além de terem sido encontrados em um intervalo de tempo satisfatório.

Dentre o grupo de instâncias, o que apresentou melhores resultados foi o grupo II, porém em todas os 48 testes realizados, os resultados podem ser considerados bons e promissores para futuras pesquisas.

Como proposta de próximos estudos, fica a possibilidade de buscar outras heurísticas ou meta-heurísticas que podem ser aplicadas ou adaptadas ao modelo buscando melhorar ainda mais as soluções encontradas. Uma outra proposta seria de aplicar outros métodos para tratar problemas de grande porte, como por exemplo a técnica *Branch and price*, que se caracteriza por ser uma junção da geração de colunas com o *Branch and bound*.

Agradecimentos

Os autores agradecem a Universidade Federal de Minas Gerais e também a CAPES pelo apoio e suporte financeiro para o desenvolvimento da pesquisa.

Referências Bibliográficas

Battini, D., Faccio, M., Persona, A., e Sgarbossa, F. (2009). Framework to optimise the inventory centralisation/decentralisation degree and feeding policy in assembly systems. *International Journal of Services and Operations Management*, 6(2):184–205.

https://proceedings.science/p/85500?lang=pt-br

Battini, D., Faccio, M., Persona, A., e Sgarbossa, F. (2010). "supermarket warehouses": stocking policies optimization in an assembly-to-order environment. *The International Journal of Advanced Manufacturing Technology*, 50(5):775–788.

Bitran, G. R. e Chang, L. (1987). A mathematical programming approach to a deterministic kanban system. *Management Science*, 33(4):427–441.

Boysen, N., Emde, S., Hoeck, M., e Kauderer, M. (2015). Part logistics in the automotive industry: Decision problems, literature review and research agenda. *European Journal of Operational Research*, 242(1):107–120.

da Cunha, A. S. e de Souza, M. C. (2008). Stronger upper and lower bounds for a hard batching problem to feed assembly lines. *Electronic Notes in Discrete Mathematics*, 30:159–164.

de Souza, M. C., de Carvalho, C. R., e Brizon, W. B. (2008). Packing items to feed assembly lines. *European Journal of Operational Research*, 184(2):480–489.

Degraeve, Z. e Jans, R. (2007). A new dantzig-wolfe reformulation and branch-and-price algorithm for the capacitated lot-sizing problem with setup times. *Operations research*, 55(5):909–920.

Emde, S. e Boysen, N. (2012). Optimally locating in-house logistics areas to facilitate jit-supply of mixed-model assembly lines. *International Journal of Production Economics*, 135(1):393–402.

Faccio, M., Gamberi, M., e Persona, A. (2013). Kanban number optimisation in a supermarket warehouse feeding a mixed-model assembly system. *International Journal of Production Research*, 51(10):2997–3017.

Fattahi, P., Roshani, A., e Roshani, A. (2011). A mathematical model and ant colony algorithm for multi-manned assembly line balancing problem. *The International Journal of Advanced Manufacturing Technology*, 53(1):363–378.

Jans, R. e Degraeve, Z. (2004). Improved lower bounds for the capacitated lot sizing problem with setup times. *Operations Research Letters*, 32(2):185–195.

Kamoun, M. e Yano, C. A. (1996). Facility layout to support just-in-time. *Transportation science*, 30(4):315–329.

Kilic, H. S. e Durmusoglu, M. B. (2015). Advances in assembly line parts feeding policies: a literature review. *Assembly Automation*, 35(1):57–68.

Martin, R. K. (2012). *Large scale linear and integer optimization: a unified approach*. Springer Science & Business Media.

Mendonça, A. A. A. (2011). *Modelos e técnicas de local branching para o problema de abastecimento de linhas de montagem*. PhD thesis, Dissertaçao de mestrado, Programa de Pós-Graduaçao em Engenharia de Produçao, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, Brasil.

Peeters, M. e Degraeve, Z. (2006). An linear programming based lower bound for the simple assembly line balancing problem. *European Journal of Operational Research*, 168(3):716–731.

Pimentel, C. M. O., Alvelos, F. P. e., e Valério de Carvalho, J. M. (2010). Comparing dantzig–wolfe decompositions and branch-and-price algorithms for the multi-item capacitated lot sizing problem. *Optimization Methods & Software*, 25(2):299–319.

Vanderbeck, F. (2000). On dantzig-wolfe decomposition in integer programming and ways to perform branching in a branch-and-price algorithm. *Operations Research*, 48(1):111–128.

https://proceedings.science/p/85500?lang=pt-br

Vanderbeck, F. e Savelsbergh, M. W. (2006). A generic view of dantzig–wolfe decomposition in mixed integer programming. *Operations Research Letters*, 34(3):296–306.

Yano, C. A., Bozer, Y., e Kamoun, M. (1998). Optimizing dock configuration and staffing in decentralized receiving. *IIE transactions*, 30(7):657–668.

https://proceedings.science/p/85500?lang=pt-br