

Cliques e Conjuntos Independentes em Grafos Prismas Complementares: Complexidade e Tratabilidade Parametrizada

Priscila Camargo

Universidade Federal Fluminense - Instituto de Computação
pcamargo@ic.uff.br

Alan Diêgo Aurélio Carneiro

Universidade Federal Fluminense - Instituto de Computação
aaurelio@ic.uff.br

Uéverton dos Santos Souza

Universidade Federal Fluminense - Instituto de Computação
usouza@ic.uff.br

RESUMO

Um grafo do tipo prisma complementar surge da união disjunta do grafo G e do seu complementar $\bar{G}$ e a adição de um emparelhamento entre os vértices correspondentes em G e $\bar{G}$. Essa classe de grafos foi introduzida recentemente e existem inúmeros problemas em aberto. Dois problemas clássicos da teoria dos grafos, determinar se no grafo existe uma clique de ordem k e determinar se no grafo existe um conjunto independente de ordem k foram provados NP-completos quando o grafo de entrada é um prisma complementar. Neste trabalho, estudamos a complexidade de ambos os problemas em grafos prismas complementares sob a ótica da complexidade parametrizada. Inicialmente provamos utilizando a teoria de Ramsey que estes problemas possuem um núcleo e, portanto são Tratáveis por Parâmetro Fixo (FPT). Em seguida, mostramos que tanto determinar se o grafo possui uma clique quanto determinar se o grafo possui um conjunto independente em grafos prisma complementares quando parametrizados pelo tamanho da solução k não possuem núcleo polinomial.

PALAVRAS CHAVE. Prismas Complementares, Cliques, Conjuntos Independentes.

Área principal: Teoria e Algoritmos em Grafos

ABSTRACT

The complementary prism arises from the disjoint union of the graph G and its complement $\bar{G}$ by adding the edges of a perfect matching joining pairs of corresponding vertices of G and $\bar{G}$. This graph class was recently introduced and there are many open problems. The classical problems of graph theory as a clique and independent set were proved NP-complete in this class of graphs. In this work, we study the complexity of both problems in complementary prisms graphs from the parameterized complexity point of view. First, we prove through Ramsey's theory that these problems have a kernel and therefore are Fixed-Parameter Tractable (FPT). Then, we show that the clique and the independent set problem in complementary prism do not admit polynomial kernel when parameterized by the size of the solution k .

KEYWORDS. Complementary Prisms, Cliques, Independent Sets.

Main Area: Theory and Algorithms on Graphs

1. Introdução

Em geometria espacial, um prisma é um sólido geométrico caracterizado pela união de duas bases paralelas e congruentes (mesma forma e mesmo tamanho) através de segmentos de reta também paralelos e congruentes que resultam em faces laterais em forma de paralelogramo [Itacarambi and Berton, 2008].

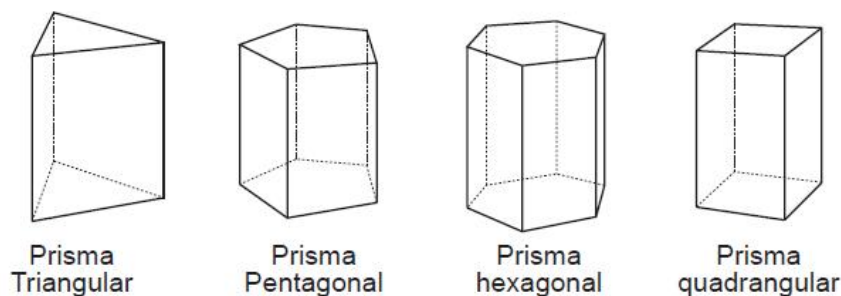


Figura 1: Exemplos de prismas

Fazendo uma alusão ao conhecido prisma, um **prisma complementar** é composto por duas bases: um grafo G e o seu complementar $\bar{G}$. A união destas bases é dada através de um emparelhamento perfeito entre os vértices correspondentes em G e $\bar{G}$.

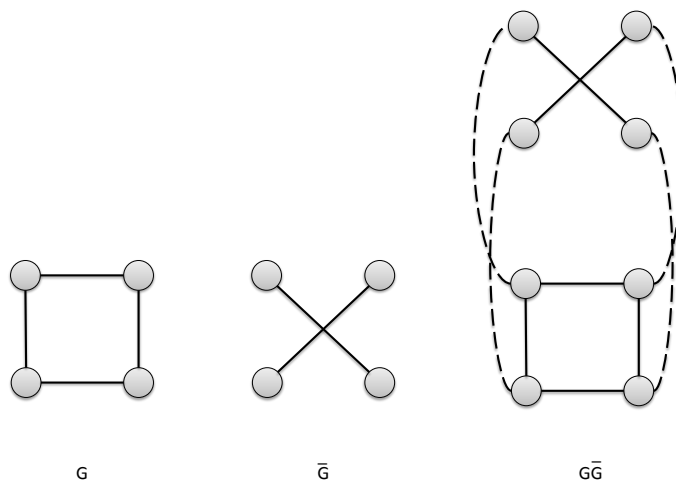


Figura 2: O grafo G , o grafo complementar $\bar{G}$ e o prisma complementar $G\bar{G}$

A figura 2 ilustra um grafo G , o seu grafo complementar $\bar{G}$ e a composição $G\bar{G}$ formando um prisma complementar.

Os prismas complementares foram introduzidos na última década por [Haynes et al., 2007]. Em [Haynes et al., 2007], foram apresentadas propriedades relacionadas a prismas complementares, tais como graus, distâncias, independência e dominação, além de exibirem uma série de problemas em suas considerações finais. Por se tratar de uma classe de grafos apresentada recentemente, existem diversos problemas ainda não investigados a seu respeito, e têm despertado interesse atualmente.

Em [Cappelle et al., 2014] foi descrito um algoritmo polinomial capaz de reconhecer prismas complementares. Em [Meierling et al., 2015] foram estudados ciclos e hamiltonicidade nesta classe de grafos. Em [Duarte et al., 2017] foram analisadas as complexidade de cliques, conjuntos independentes, k -dominação e P_3 -convexidade em prismas complementares. Neste último trabalho, foi provado que tanto o problema da clique quanto o problema dos conjuntos independentes são NP-completos para esta classe de grafos.

Neste artigo, investigaremos os problemas das cliques e dos conjuntos independentes, sob a ótica da complexidade parametrizada. O resto desse trabalho é organizado da seguinte maneira: na Seção 2 são dadas as principais definições e notações utilizadas; na Seção 3 mostramos que tanto determinar se existe uma clique de tamanho k ou um conjunto independente de tamanho k em um grafo prisma complementar $G\bar{G}$ quanto parametrizados pelo tamanho da solução k são Tratáveis por Parâmetro Fixo (*Fixed Parameter Tractable* (FPT)) e que em ambos os problemas não possuem núcleo polinomial. Na Seção 4 são apresentadas as conclusões e considerações finais.

2. Definições e Notações

Nesta seção serão apresentados os principais conceitos e notações utilizados neste trabalho.

2.1. Grafos

Utilizamos as notações e conceitos padrão de teoria dos grafos e quaisquer notações ou conceitos não definidos podem ser encontrados em [Bondy and Murty, 1976].

Um *grafo* G é um par ordenado $(V(G), E(G))$, onde $V(G)$ é um conjunto finito de vértices e $E(G)$ é um conjunto de arestas formadas por pares de vértices. Denotaremos a aresta que liga o vértice u ao vértice v por uv . Caso a aresta uv exista, dizemos que o vértice u é adjacente ao vértice v e que a aresta uv é incidente a u e a v . Chamaremos de *extremidades* ou *extremos* da aresta os pares de vértices que formam cada aresta. Para este estudo, consideramos apenas grafos não orientados, simples e finitos. Denotaremos por $\bar{G}$ o complemento de um grafo G . $\bar{G}$ é composto pelo mesmo conjunto de vértices de G e pelo conjunto de arestas complementares de G . Isto é, se a aresta uv existir em G , ela não existirá em $\bar{G}$, logo os vértices u e v não serão adjacentes em $\bar{G}$. Entretanto, se os vértices u e v não são adjacentes em G , existirá a aresta uv em $\bar{G}$. O número de vértices de um grafo G é dito ser a *ordem* ou *cardinalidade* de G . Um *subgrafo* de um grafo G é um grafo H tal que $V(H) \subseteq V(G)$ e $E(H) \subseteq E(G)$, denotado por $H \subseteq G$. Denotamos por $G[X]$ um subgrafo induzido de G por um subconjunto $X \subseteq V(G)$ se, para qualquer par de vértices x e y de $G[X]$, xy é uma aresta de $G[X]$ se e somente se xy é uma aresta de G . *Clique* é um subconjunto C de vértices de G tal que em C todo par de vértices é adjacente. *Conjunto independente* de um grafo G é um subconjunto I de vértices de G tal que em I não existem dois vértices adjacentes. *Grafos split* são grafos cujo conjunto de vértices pode ser particionado em 2 subconjuntos distintos: um conjunto independente e uma clique.

2.2. Complexidade Parametrizada

As definições e conceitos básicos de complexidade parametrizada podem ser encontrados em [Cygan et al., 2015, Downey and Fellows, 1999, Flum and Grohe, 2006, Niedermeier, 2006].

A teoria da NP-completude foi desenvolvida para determinar que determinados problemas difíceis são, de alguma maneira, equivalentes. Problemas ditos NP-difíceis são comumente chamados de intratáveis e a menos que $P = NP$ não podem ser resolvidos por algoritmos em tempo polinomial. Ao considerar que muitos desses problemas precisam ser resolvidos na prática e não são conhecidos algoritmos para resolvê-los em tempo polinomial, torna-se pertinente o seguinte questionamento: "Como solucioná-los da forma mais eficiente possível?" [Santos and Souza, 2015].

Uma alternativa para trabalhar com esses problemas é a Teoria da Complexidade Parametrizada. Essa teoria foi desenvolvida por Downey e Fellows [] e tem como princípio estudar a existência de algoritmos cuja complexidade exponencial esteja relacionada a certos aspectos da entrada do problema e não a entrada como um todo. Estes aspectos são chamados de parâmetros (k).

O interesse em tais parâmetros se deve ao fato de que, em muitos casos, somente uma pequena faixa de valores é realmente importante na prática. Logo, o parâmetro k pode ser considerado pequeno em comparação com o tamanho da entrada. [Santos and Souza, 2015].

Um problema parametrizado Π é chamado Tratáveis por Parâmetro Fixo (*Fixed Parameter Tractable* (FPT)) se existe um algoritmo A (chamado algoritmo FPT) que computa corretamente qualquer instância $I = (\chi, k)$ e decide se I é uma instância *sim* ou *não* em tempo $f(k) \cdot |\chi|^{O(1)}$ para alguma função computável f . Dessa maneira, se k é definido com um valor pequeno, o crescimento da função em relação a χ é pequeno.

2.2.1. Kernelização

A **kernelização** ou **redução a um núcleo** é uma poderosa técnica comumente utilizada na obtenção de algoritmos FPT para problemas parametrizados. A técnica consiste em reduzir uma instância $I = (\chi, k)$ parametrizada por um parâmetro k a uma nova instância equivalente $I' = (\chi', k')$ tal que I' de alguma forma é limitada pelo parâmetro k . Uma instância $I = (\chi, k)$ é considerada equivalente a $I' = (\chi', k')$ se I for uma instância *sim*, I' também será uma instância *sim*. A instância reduzida I' é comumente chamada de **kernel** ou **núcleo**. A obtenção de um núcleo consiste basicamente em um pré-processamento no qual são resolvidos eficientemente “partes mais fáceis” de um problema reduzindo assim o seu tamanho [Cygan et al., 2015]. O núcleo de um problema parametrizado é formalmente definido a seguir:

Definição 1. Redução a um núcleo: *Seja $\Pi(k)$ um problema parametrizado. $\Pi(k)$ possui um núcleo se para toda instância $I = (\chi, k)$ existe um algoritmo A executável em tempo polinomial que fornece como saída uma instância equivalente $I' = (\chi', k')$ tal que $k' \leq g(k)$ para alguma função computável g .*

Existe uma forte relação entre redução a um núcleo e Tratabilidade por Parâmetro Fixo evidenciada no Teorema a seguir:

Teorema 2. [Santos and Souza, 2015] *Um problema $\Pi(k)$ admite um algoritmo tratável por parâmetro fixo se e somente se ele admite um núcleo.*

O ponto chave na técnica de redução a um núcleo é o tamanho do núcleo em relação ao parâmetro onde busca-se encontrar o menor núcleo já que possibilita o desenvolvimento de um algoritmo FPT mais eficiente. Uma ferramenta utilizada para demonstrar o limite inferior no tamanho do núcleo é chamada de PPT-redução (*Parameterized Polynomial-Time*). Este conceito foi introduzido por [Bodlaender et al., 2008b] e consiste em uma redução parametrizada em tempo polinomial. Tal redução foi definida a seguir.

Definição 3. PPT-redução: [Bodlaender et al., 2008b] *Seja $\Pi(k)$ e $\Pi'(k')$ dois problemas parametrizados onde $k' \leq g(k)$ para alguma função polinomial $g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$. Uma PPT-redução de $\Pi(k)$ a $\Pi'(k')$ é uma redução R tal que:*

- (i) *Para toda instância $I = (\chi, k)$, temos que $I \in \Pi(k)$ se e somente se $R(I) \in \Pi'(k')$;*
- (ii) *R é computável em tempo polinomial (em relação a χ).*

2.3. Teoria de Ramsey

Em [Ramsey, 2009] foi apresentado o clássico Teorema de Ramsey. Neste trabalho, Ramsey provou que dado quaisquer inteiros positivos r e l , existe um número mínimo inteiro $u(r, l)$ no qual qualquer grafo que possua $u(r, l)$ vértices contém ou uma clique de tamanho r ou um conjunto independente de tamanho l . Na literatura $u(r, l)$ é conhecido como o **número de Ramsey**.

Problemas em Teoria de Ramsey têm sido bastante estudados e muitas técnicas têm sido desenvolvidas para estimar os números de Ramsey [Clemens et al., 2017]. Entretanto, determinar

estes números tem sido um grande desafio na teoria dos grafos. De fato, somente são conhecidos alguns valores exatos para o número de Ramsey.

Dessa forma, algumas contribuições têm se concentrado em determinar limites superiores e inferiores para estes números. Em [Erdős and Szekeres, 1935] foi estabelecido um limite superior para o número de Ramsey definido a seguir (Teorema 4).

Teorema 4. [Erdős and Szekeres, 1935] Para todos inteiros positivos r e l , vale que:

$$u(r, l) = \binom{r + l - 2}{r - 1}$$

Neste trabalho, denotaremos por k -RAMSEY o problema de encontrar uma clique de tamanho k ou um conjunto independente de tamanho k em um grafo G . Em [Kratsch, 2014] provou-se que o problema k -RAMSEY não admite núcleo polinomial a menos que $NP \subseteq coNP/poly$.

3. Resultados

Em [Duarte et al., 2017] provou-se que tanto o problema de determinar se existe uma clique de ordem k (Denotaremos por k -CLIQUE) quanto o problema de determinar se existe um conjunto independente de ordem k (Denotaremos por k -CONJUNTO INDEPENDENTE) são NP-completos quando o grafo de entrada é um prisma complementar. Dessa forma, esta seção tem como principal objetivo mostrar que ambos os problemas são FPT's e não admitem núcleo de tamanho polinomial.

3.1. Tratabilidade Parametrizada

Utilizando a definição de limite superior do número de Ramsey (Teorema 4) nós provamos que tanto o problema k -CLIQUE quanto k -CONJUNTO INDEPENDENTE pertencem à classe FPT quando o grafo de entrada é um prisma complementar e o parâmetro é o tamanho da solução k .

Teorema 5. k -CLIQUE e k -CONJUNTO INDEPENDENTE são FPT quando o grafo de entrada é $G\bar{G}$ e o parâmetro é o tamanho da solução k .

Demonstração. Primeiramente suponha que $|V(G)| \geq u(k, k)$. Sendo assim, através do número de Ramsey, podemos afirmar que ou haverá uma clique de ordem k em G ou haverá um conjunto independente de ordem k em G . Pela propriedade de prisma complementar é fácil ver que se existir uma clique de ordem k em G , consequentemente há um conjunto independente de ordem k em $\bar{G}$. Analogamente, se existir um conjunto independente de ordem k em G , consequentemente há uma clique de ordem k em $\bar{G}$.

Por outro lado suponha que $|V(G)| < u(k, k)$. Utilizaremos o limite superior do número de Ramsey apresentado anteriormente:

$$u(r, l) = \binom{r + l - 2}{r - 1}$$

Já que o interesse é a busca por um subgrafo (clique ou conjunto independente) de ordem k , podemos reescrever a fórmula para limite superior do número de Ramsey em função de k :

$$u(k, k) = \binom{k + k - 2}{k - 1}$$

Dessa forma, observe que $|G| \leq f(k)$ para alguma função computável f . Isto é, a cardinalidade de G (e $\bar{G}$) é uma função limitada de k e portanto, G é um núcleo. $\square$

O Teorema 5, portanto, apresenta um núcleo para o problema k -CLIQUE ou k -CONJUNTO INDEPENDENTE quando o grafo de entrada é um prisma complementar. Dessa forma, ambos os problemas, através do Teorema 2 são solucionáveis em tempo $f(k).n^{O(1)}$ e pertencem à classe FPT.

3.2. Limite Inferior de Redução a um Núcleo

Como apontado anteriormente (Teorema 2), um problema $\Pi(k)$ pertence a classe FPT se e somente se $\Pi(k)$ possui um núcleo. Em geral esses núcleos obtidos possuem tamanhos exponenciais (ou até pior) em relação ao parâmetro. Dessa forma, é natural para qualquer problema FPT questionarmos quão bom é o núcleo, ou mesmo se é possível a obtenção de um núcleo menor (em geral busca-se um núcleo de tamanho polinomial). Embora existam diversos resultados positivos sobre a existência de núcleos polinomiais [Downey and Fellows, 2012, Bonsma et al., 2003, Alber et al., 2004] ou até mesmo lineares [Bodlaender and Penninkx, 2008, Bodlaender et al., 2008a], apenas recentemente é que têm aparecido os primeiros resultados a respeito da inviabilidade destes núcleos [Santos and Souza, 2015].

Mostraremos que embora k -CLIQUE e k -CONJUNTO INDEPENDENTE pertençam à classe FPT quando parametrizados pelo tamanho da solução k , ambos *não* admitem núcleo polinomial a menos que $NP \subseteq coNP/poly$. Primeiramente provaremos que problema k -CLIQUE não admite núcleo polinomial através de uma PPT-redução do problema k -RAMSEY.

Teorema 6. *k -CLIQUE quando o grafo de entrada é $G\bar{G}$ e o parâmetro é o tamanho da solução k não admite núcleo polinomial, a menos que $NP \subseteq coNP/poly$.*

Demonstração. Através de uma PPT-redução do problema k -RAMSEY para k -CLIQUE, demonstraremos que k -CLIQUE não admite núcleo polinomial quando o grafo de entrada é $G\bar{G}$ e o parâmetro é o tamanho da solução k . No problema k -RAMSEY é dado como entrada um grafo G e um inteiro positivo k e deseja-se determinar se G possui ou um conjunto independente ou uma clique de tamanho k . O problema é conhecido por não possuir núcleo polinomial a menos que $NP \subseteq coNP/poly$ [Kratsch, 2014]. Seja (G, k) uma instância do problema k -RAMSEY, construímos um prisma complementar $G\bar{G}$ onde $G\bar{G}$ possui uma clique de tamanho k se e somente se G possua uma clique ou um conjunto independente de tamanho k .

Suponha que G possui uma clique de tamanho k . Assim, por construção, é fácil ver que o prisma complementar $G\bar{G}$ possui uma clique de tamanho k em G .

Por outro lado, suponha que G possui um conjunto independente de tamanho k . Assim, por construção, é fácil ver que o prisma complementar $G\bar{G}$ possui uma clique de tamanho k em $\bar{G}$.

Considere que $G\bar{G}$ possui uma clique de tamanho k . Pela definição de prisma complementar, sabemos que a clique está totalmente contida em G ou em $\bar{G}$. Suponha que a clique esteja em $\bar{G}$. Assim, por construção, é fácil ver que G possui um conjunto independente de tamanho k . $\square$

Mostraremos que o problema dos conjuntos independentes em grafos prismas complementares também não admite núcleo polinomial (Corolário 9). Entretanto, diferentemente de cliques, os conjuntos independentes não são tão bem comportados nos prismas complementares. Sendo assim, dividiremos essa demonstração em duas etapas. Na primeira (Lema 7) é demonstrada uma PPT-redução do problema k -SPLIT para o problema k -CONJUNTO INDEPENDENTE. A segunda (Teorema 8) é demonstrada uma PPT-redução do problema k -RAMSEY para o problema k' -SPLIT onde $k' = 3k$.

A classe de grafos split foi introduzida por [Foldes and Hammer, 1977] e é uma classe de grafos bem conhecida [Bertossi, 1984, Li and Chen, 2001]. Os grafos split consistem em grafos cujo conjunto de vértices podem ser particionados dois grupos: uma clique e um conjunto independente. Definiremos como k -SPLIT o problema de determinar se um grafo G possui um subgrafo split H de tamanho k .

Lema 7. *k -SPLIT quando parametrizado pelo tamanho da solução k é PPT-redutível ao problema k' -CONJUNTO INDEPENDENTE tendo como grafo de entrada um prisma complementar $G\bar{G}$ e parametrizado pelo tamanho da solução $k' = k$.*

Demonstração. Provaremos que k -SPLIT se reduz em tempo polinomial ao problema k -CONJUNTO INDEPENDENTE em um prisma complementar. No problema k -SPLIT é dado um grafo G e um inteiro positivo k e deseja-se determinar se G possui um subgrafo H de cardinalidade pelo menos k tal que H seja subdividido em um conjunto independente e uma clique. A partir de um grafo G , instância do k -SPLIT criamos um grafo $G\bar{G}$ tal que G possui um subgrafo split de tamanho k se e somente se o seu prisma complementar possui um conjunto independente de tamanho k .

Suponha que G possui um subgrafo split H de tamanho k . Como H pode ser particionado em dois subgrafos $H = \{I \cup C\}$, onde I é um conjunto independente e C é uma clique, temos as seguintes possibilidades:

- $H = C$, portanto G possui uma clique de tamanho k . Por construção, $\bar{G}$ possui um conjunto independente de tamanho k . Logo, o prisma complementar $G\bar{G}$ possui um conjunto independente de tamanho k .
- $H = I$, portanto G possui um conjunto independente de tamanho k . Logo, o prisma complementar $G\bar{G}$ possui um conjunto independente de tamanho k .
- $I \neq \emptyset$ and $C \neq \emptyset$. Sem perda de generalidade, seja I um conjunto independente de cardinalidade p e H de cardinalidade k . Dessa forma C possui cardinalidade $k - p$. Note que assim como o conjunto independente I em G induz uma clique C' de tamanho q em $\bar{G}$, a clique C induz um conjunto independente I' de tamanho $k - q$ em $\bar{G}$ (veja Figura 3). Portanto, $G\bar{G}$ possui uma combinação $I \cup I'$ que forma um conjunto independente de tamanho k .

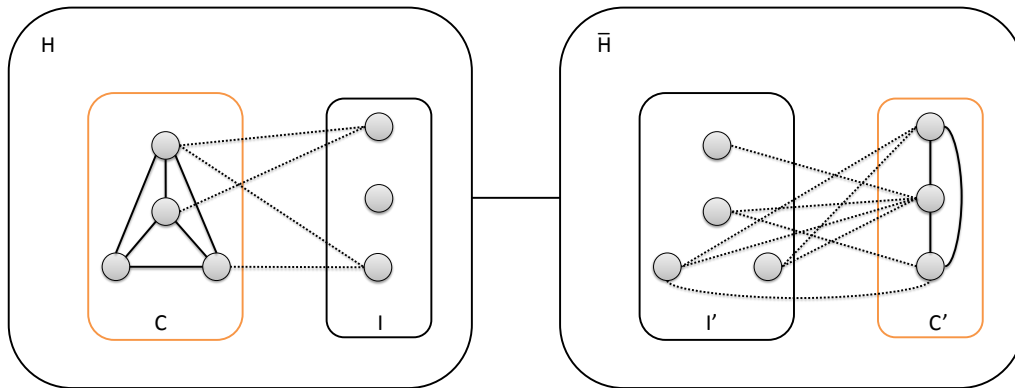


Figura 3: Subgrafo $H\bar{H}$ de um prisma complementar $G\bar{G}$, onde $H = (C \cup I)$, C e C' são cliques, I e I' são conjuntos independentes.

Por outro lado, suponha que um prisma complementar $G\bar{G}$ que possui um conjunto independente I_p de tamanho k . Podemos então observar I' em termos de G e $\bar{G}$, portanto, temos as seguintes possibilidades:

- O conjunto independente $I_p \cap \bar{G} = \emptyset$, i.e., I_p está totalmente contido em G . Como todo conjunto independente é um grafo split, então G possui um grafo split de tamanho k .
- O conjunto independente $I_p \cap G = \emptyset$, i.e., I_p está totalmente contido em $\bar{G}$. Pela definição de prisma complementar, G possui uma clique de tamanho k e portanto G possui um subgrafo split de tamanho k .
- O conjunto independente $I_p \cap G \neq \emptyset$ e $I_p \cap \bar{G} \neq \emptyset$. Pelas propriedades de prisma complementar, e ainda, como I_p é um conjunto independente, I' não possui vértices correspondentes v_i e

$\bar{v}_i$. Já que I_p possui cardinalidade k , existe um subconjunto $I' \subset I_p$ tal que $I' \cap \bar{G}$ não é vazio e I' possui cardinalidade p . Como I' é um conjunto independente, I' induz uma clique C de tamanho p em G . Portanto, é fácil ver que G possui um subgrafo split de $H = (I_p \setminus I') \cap C$ de tamanho k .

□

A redução do problema k -RAMSEY para o problema do subgrafo k -SPLIT(3k) é formalmente apresentada a seguir:

Teorema 8. k -RAMSEY parametrizado pelo tamanho da solução k é PPT-redutível ao k' -SPLIT parametrizado pelo tamanho da solução $k' = 3k$.

Demonstração. Provaremos que o problema k -RAMSEY parametrizado pelo tamanho da solução k é PPT-redutível ao k' -SPLIT parametrizado pelo tamanho da solução $k' = 3k$. Considere que um grafo G instância do problema k -RAMSEY, i.e., G possui uma clique de tamanho k ou um conjunto independente de tamanho k . Construímos uma instância H para o problema k' -SPLIT tal que $k' = 3k$ da seguinte forma (Figura 4):

1. Faça inicialmente $G' = G \cup \bar{G}$, i.e., crie em G' uma cópia de G e insira o grafo complementar $\bar{G}$ também em G' .
2. Crie $2k$ vértices em G' e os separe em dois subgrafos (S_1 e S_2) de tamanho k .
3. Crie arestas entre todos os vértices de:
 - (a) $G'[V(G)]$ e S_1 ;
 - (b) S_1 e S_2 ;
 - (c) S_2 e $G'[V(\bar{G})]$.
4. Faça $k' = 3k$.

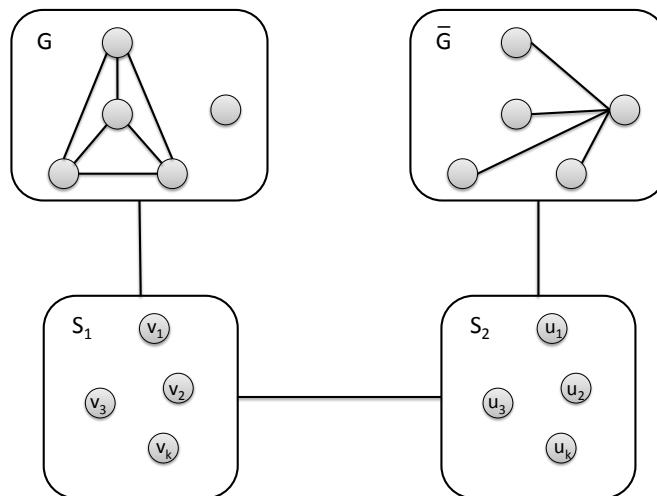


Figura 4: Exemplo de uma instância para o problema k -SPLIT gerada a partir de um grafo G .

Mostraremos a seguir que G possui uma clique de tamanho k ou um conjunto independente de tamanho k se, e somente se H possui um subgrafo split de tamanho k' . Suponha, sem perda de generalidade que G possui uma clique C de cardinalidade k . Construiremos um subgrafo split $H = (I' \cup C')$ onde $H \subseteq G'$ incluindo em I' (conjunto independente) os vértices em G' equivalentes a C em $\bar{G}$ e S_1 . Em C' (clique) incluir os vértices em G' equivalentes a C em G . Suponha, sem perda de generalidade que G possui um conjunto independente I de cardinalidade k . Construiremos um subgrafo split $H = (I' \cup C')$ onde $H \subseteq G'$ incluindo em I' (conjunto independente) os vértices em G' equivalentes a I em G e S_2 . Em C' (clique) incluir os vértices em G' equivalentes a C em $\bar{G}$.

Por outro lado suponha que G' possui um subgrafo split H de tamanho k' . Como H é uma partição $I \cup C$, e G' é dividido em quatro subgrafos, temos as seguintes possibilidades:

- i) O conjunto independente I possui cardinalidade menor que $2k$. Sem perda de generalidade suponha $k > 2$. Dessa forma, a clique C deve ter cardinalidade pelo menos $k + 1$. Já que vértices de G não são adjacentes a $\bar{G}$, S_1 e S_2 são conjuntos independentes e $G'[S_1 \cup S_2]$ é um $K_{k,k}$, a clique C contém no máximo um vértice de $G'[S_1 \cup S_2]$. Portanto, uma clique em G' deve possuir pelo menos $|C| - 1$ vértices ou em $G'[V(G)]$ ou em $G'[V(\bar{G})]$ e portanto C induz ou uma clique ou um conjunto independente de tamanho pelo menos k em G .
- ii) O conjunto independente I possui cardinalidade pelo menos $2k$.
 - (a) Supondo que $I \cap (S_1 \cup S_2) = \emptyset$, i.e., não existem vértices do conjunto independente I em S_1 ou S_2 . Assim, é fácil ver que os vértices de I em G' ; ou induzem um conjunto independente de tamanho $|I|$ se I está em $G'[V(G)]$; ou uma clique de tamanho $|I|$ se I está em $G'[V(\bar{G})]$; ou um subgrafo split de tamanho $|I|$ com uma clique de tamanho q se os vértices de I estão em $G'[V(G)]$; ou um conjunto independente de tamanho $|I| - q$ se os vértices de I estiverem em $G'[V(\bar{G})]$.
 - (b) Supondo que $I \cap (S_1 \cup S_2) \neq \emptyset$, i.e. existem vértices do conjunto independente I em S_1 ou S_2 . Como $G'[S_1 \cup S_2]$ é um $K_{k,k}$, se existe vértice de S_1 em I não existe de S_2 e vice versa. Ainda, note que S_1 e S_2 tem cada um cardinalidade k . Além disso, existe um subconjunto $I_1 = (I \cap G'[G \cup \bar{G}])$ tal qual é fácil obter um subgrafo split em G de cardinalidade pelo menos k analogamente a *i.(a)*.

□

Corolário 9. k -CONJUNTO INDEPENDENTE quando o grafo de entrada é $G\bar{G}$ e o parâmetro é o tamanho da solução k não admite núcleo polinomial, a menos que $NP \subseteq coNP/poly$.

Demonstração. Através do Lema 7 e Teorema 8, temos que k -RAMSEY é PPT redutível ao problema k' -CONJUNTO INDEPENDENTE quando o grafo de entrada é um prisma complementar e o parâmetro é o tamanho da solução $k' = 3k$, portanto, não admite um núcleo polinomial. □

Mostramos que o problema de determinar se um grafo prisma complementar $G\bar{G}$ possui um conjunto independente de tamanho k não possui um núcleo polinomial pelas propriedades transitivas das PPT-reduções (Figura 5).

4. Conclusões e Considerações Finais

Neste trabalho, estudamos o problema de k -CLIQUE e k -CONJUNTO INDEPENDENTE tendo como entrada a classe de grafos prisma complementar. Tais problemas foram provados NP-completos por [Karp, 1972] para grafos gerais. Em [Duarte et al., 2017] foi provado que ambos os problemas são NP-completos em grafos prisma complementar. Ao estudarmos, sob a ótica da complexidade parametrizada, utilizando como ferramenta a Teoria de Ramsey, mostramos que tanto o

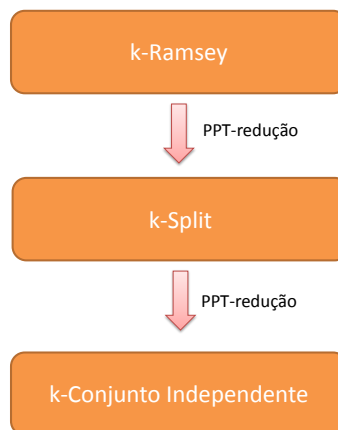


Figura 5: PPT-reduções de k -RAMSEY ao Conjunto Independente em grafos prisma complementares.

problema k -CLIQUE quanto o problema k -CONJUNTO INDEPENDENTE em grafos prismas complementares pertencem à classe FPT quando parametrizados pelo tamanho da solução k , ou seja, são Tratáveis por Parâmetro Fixo. Além disso, através de PPT-reduções mostramos que ambos os problemas não admitem um núcleo polinomial. É interessante evidenciar que a inviabilidade de núcleo polinomial para o problema k -CONJUNTO INDEPENDENTE quando parametrizado pelo tamanho da solução k foi obtida de forma transitiva a partir do problema intermediário k -SPLIT. Sendo assim, o problema de determinar se um grafo possui um subgrafo split de cardinalidade k é FPT a menos que $NP \subseteq coNP/poly$ e também não possui núcleo polinomial. Os principais resultados são sumarizados em Figura 6.

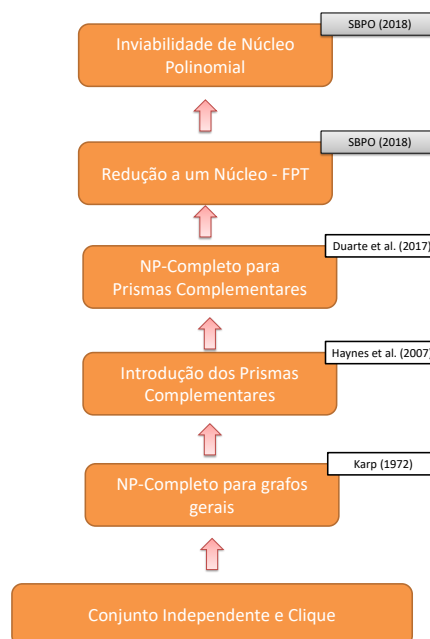


Figura 6: Principais resultados obtidos perante a literatura.

Referências

- Alber, J., Fellows, M. R., and Niedermeier, R. (2004). Polynomial-time data reduction for dominating set. *Journal of the ACM (JACM)*, 51(3):363–384.
- Bertossi, A. A. (1984). Dominating sets for split and bipartite graphs. *Information processing letters*, 19(1):37–40.
- Bodlaender, H. L. and Penninkx, E. (2008). A linear kernel for planar feedback vertex set. In *International Workshop on Parameterized and Exact Computation*, pages 160–171. Springer.
- Bodlaender, H. L., Penninkx, E., and Tan, R. B. (2008a). A linear kernel for the k-disjoint cycle problem on planar graphs. In *International Symposium on Algorithms and Computation*, pages 306–317. Springer.
- Bodlaender, H. L., Thomassé, S., and Yeo, A. (2008b). Analysis of data reduction: Transformations give evidence for non-existence of polynomial kernels.
- Bondy, J. A. and Murty, U. S. R. (1976). *Graph theory with applications*, volume 290. Macmilan.
- Bonsma, P. S., Brueggemann, T., and Woeginger, G. J. (2003). A faster fpt algorithm for finding spanning trees with many leaves. In *International Symposium on Mathematical Foundations of Computer Science*, pages 259–268. Springer.
- Cappelle, M. R., Penso, L., and Rautenbach, D. (2014). Recognizing some complementary products. *Theoretical Computer Science*, 521:1–7.
- Clemens, D., Jenssen, M., Kohayakawa, Y., Morrison, N., Mota, G. O., Reding, D., and Roberts, B. (2017). Numero de ramsey relativo a arestas de potências de caminhos.
- Cygan, M., Fomin, F. V., Kowalik, Ł., Lokshtanov, D., Marx, D., Pilipczuk, M., Pilipczuk, M., and Saurabh, S. (2015). *Parameterized algorithms*, volume 3. Springer.
- Downey, R. G. and Fellows, M. R. (1999). Parameterized complexity. *Monogr. Comput. Sci. Springer, New York*, 87.
- Downey, R. G. and Fellows, M. R. (2012). *Parameterized complexity*. Springer Science & Business Media.
- Duarte, M. A., Penso, L., Rautenbach, D., and dos Santos Souza, U. (2017). Complexity properties of complementary prisms. *Journal of Combinatorial Optimization*, 33(2):365–372.
- Erdős, P. and Szekeres, G. (1935). A combinatorial problem in geometry. *Compositio Mathematica*, 2:463–470.
- Flum, J. and Grohe, M. (2006). Parameterized complexity theory, volume xiv of texts in theoretical computer science. an eatcs series.
- Foldes, S. and Hammer, P. L. (1977). Split graphs having dilworth number two. *Canad. J. Math*, 29(3):666–672.
- Haynes, T. W., Henning, M. A., Slater, P. J., and van der Merwe, L. C. (2007). The complementary product of two graphs. *Bulletin of the Institute of Combinatorics and its Applications*, 51:21–30.
- Itacarambi, R. R. and Berton, I. d. C. B. (2008). *Geometria, brincadeira e jogos*. Editora Livraria da Física.

- Karp, R. M. (1972). Reducibility among combinatorial problems. In *Complexity of computer computations*, pages 85–103. Springer.
- Kratsch, S. (2014). Co-nondeterminism in compositions: a kernelization lower bound for a ramsey-type problem. *ACM Transactions on Algorithms (TALG)*, 10(4):19.
- Li, W. and Chen, J. (2001). Endomorphism-regularity of split graphs. *European Journal of Combinatorics*, 22(2):207–216.
- Meierling, D., Protti, F., Rautenbach, D., and de Almeida, A. R. (2015). Cycles in complementary prisms. *Discrete Applied Mathematics*, 193:180–186.
- Niedermeier, R. (2006). Invitation to fixed-parameter algorithms.
- Ramsey, F. P. (2009). On a problem of formal logic. In *Classic Papers in Combinatorics*, pages 1–24. Springer.
- Santos, V. F. d. and Souza, U. d. S. (2015). Uma introdução à complexidade parametrizada.