Um Algoritmo Genético com Busca Local pela Descida Randômica na Otimização de Carteiras de Ações

Maisa Kely de Melo
Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais (CEFET-MG)
Av. Amazonas 7675, 30510-000 – Nova Gameleira – Belo Horizonte – MG – Brasil
Instituto Federal de Minas Gerais Campus Formiga
Rua São Luiz Gonzaga s/nº, 35570-000 – São Luiz – Formiga – MG – Brasil
maisa.melo@ifmg.edu.br

Rodrigo Tomás Nogueira Cardoso
Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais (CEFET-MG)
Av. Amazonas 7675, 30510-000 – Nova Gameleira – Belo Horizonte – MG – Brasil
rodrigoc@des.cefetmg.br

RESUMO

A composição das carteiras de investimentos, visando aumentar os retornos, minimizando a exposição ao risco, tem sido um assunto de crescente interesse entre os brasileiros. O objetivo deste trabalho é apresentar um algoritmo genético com a busca local Descida Randômica para o problema de otimização de porfólios. No caso mono-objetivo foi minimizado o risco sendo o retorno restrição, já o caso multiobjetivo foi utilizado o método de escalarização P_λ associado com o algoritmo genético da busca local. Foram utilizados dados históricos de ações negociadas no Brasil. Ao serem comparados os resultados dos algoritmos mono-objetivo foi concluído que as soluções propostas pelo algoritmo com busca local são estatisticamente diferentes que aquelas propostas pelo algoritmo básico. O algoritmo multiobjetivo foi considerado satisfatório porque apresentou soluções de boa qualidade que apresentam diversidade da fronteira.

PALAVRAS CHAVE. Carteira de Investimento. Algoritmo Genético. Busca Local. Descida Randômica.

Tópicos: OC - Otimização Combinatória. GF - Gestão Financeira.

ABSTRACT

The composition of investment portfolios, looking for increasing returns, minimizing exposure to risk, has been a subject of growing interest among Brazilians. The aim of this work is to propose a basic genetic algorithm and a genetic algorithm with the local search Random Descent, yet make the multiobjective optimization return $times$ risk of a genetic algorithm with this local search. In the mono-objective case the risk was minimized and the return restriction. In the multiobjective case the scaling method P_λ Associated with the local search genetic algorithm was used. Historical data on shares traded in Brazil were used. When comparing the results of the mono-objective algorithms, it was concluded that the solutions proposed by the algorithm with local search are statistically better than those proposed by the basic algorithm. The multiobjective algorithm was considered satisfactory because it presented good quality solutions that present border diversity.

KEYWORDS. Investment portfolios. Genetic Algorithm. Local Search. Random descent.

https://proceedings.science/p/85475?lang=pt-br

1. Introdução

A otimização de carteiras de ações é um assunto em pauta que demanda muita atenção. Esta motivação tem origem nos interesses dos investidores, que visam obter o maior retorno possível expondo-se a um risco tão pequeno quanto desejável. Este interesse pelos investidores é bem enraizado e pertinente uma vez que, o mercado de ações movimenta negócios no mundo inteiro, mobilizando diariamente um respeitável volume financeiro. As empresas dos mais diversos segmentos (bancário, alimentos, papel e celulose, petróleo,...) possuem ações sendo negociadas em bolsas de valores e estão sujeitas às oscilações inerentes ao mercado. Em vista dessa vulnerabilidade gerada pela constante "mudança de personalidade" do mercado, é justificável os investidores inclinarem-se em busca de mecanismos que possam lhe dar informações sobre o comportamento do mercado.

Em seu artigo *Portfolio Selection*, Markowitz [1952], trouxe uma nova concepção sobre o gerenciamento da composição de carteiras de investimentos. Markowitz mostrou que a redução do risco associado a um nível considerado de retorno de um investimento ocorre quando a carteira é formada com base no conceito da diversificação. Neste sentido, Elton et al. [2004], afirmam que as características de retorno de carteiras de ativos podem diferir das características dos retornos de ativos individuais, mais precisamente, combinações adequadamente escolhidas de dois ativos apresentarão menos risco do que o menos arriscado dos dois ativos.

De posse das ideias disseminadas pela teoria de Markowitz, um dos passos a seguir é buscar ferramentas matemáticas que auxiliem na construção da fronteira eficiente (carteira ótima), que visa obter o menor risco possível para um dado nível de retorno estabelecido e vice-versa. Na prática, procuram-se modelos que representam o risco e/ou o retorno e que possam ser otimizados levando em consideração algumas restrições. Segundo Assaf Neto [1999], a essência dos modelos de avaliação almejam projetar o comportamento futuro dos ativos financeiros estabelecendo previsões com relação às variações de seus preços no mercado.

Neste contexto, entram em cena os Algoritmos Genéticos (AG) que têm se mostrado uma ferramenta muito usada na literatura. Tanto por não exigirem questões analíticas das funções envolvidas como continuidade e diferenciabilidade quanto, como apontado por Oliveira [2016], serem algoritmos populacionais que geram diversas soluções simultaneamente e representam uma boa alternativa àqueles problemas cujas restrições aferem grande complexidade.

O objetivo deste trabalho é propor um algoritmo genético com busca local, que será utilizado na otimização de carteiras de ações com o propósito de minimizar o risco de uma carteira de investimentos, tendo o retorno como restrição e realizar a otimização multiobjetivo pelo método de escalarização P_λ associado com a busca local Descida Randômica. Foi considerada uma série histórica de cotações dos ativos que compuseram o índice IBOVESPA no período de 2009 a 2015. O texto está disposto como segue: Na Seção 2 é feita a caracterização do problema descrevendo as principais peculiaridades do problema proposto. Na Seção 3 é estabelecida a formulação matemática da otimização de carteiras de ações, com a definição das funções objetivo, restrições e modelos para otimização. Na Seção 4 está a definição dos algoritmos, dos parâmetros, dos dados e da medida de risco utilizada. Na Seção 5 constam os resultados, onde foi constatado, por exemplo, que existe diferença significativa entre resultados fornecidos pelo algoritmo genético simples e pelo algoritmo genético com busca local. Constam também as características de carteiras obtidas pela otimização nos aspectos de cardinalidade, pesos atribuídos, retornos e riscos das carteiras e dos ativos que compõem essas carteiras. O texto é finalizado na Seção 6.

2. Caracterização do Problema

A essência da construção dos algoritmos genéticos é a Teoria Evolucionária de Darwin. Para simular os processos existentes na natureza os algoritmos genéticos contam com operadores que têm funcionalidades específicas, como é o caso da mutação, cruzamento e seleção. Cada um desses operadores tem um impacto na condução do algoritmo que contribui para obter soluções mais aptas ao ambiente. Como os algoritmos genéticos trabalham com uma população com muitos

https://proceedings.science/p/85475?lang=pt-br

indivíduos, pode ser interessante realizar uma busca local em alguns deles. Entende-se por busca local um processo de melhoramento da solução que ocorre somente nos pontos de uma vizinhança.

Existem vários métodos de busca local, cada método tem suas contribuições e percalços. Um dos fatores que mais variam entre as buscas locais é a maneira que são geradas as vizinhanças e a forma que são selecionados os vizinhos para avaliação. Para este trabalho foi escolhido o método da Descida Randômica, este método não requer que seja construída toda a vizinhança do indivíduo, visto que os vizinhos são tomados aleatoriamente. O método é executado mais rápido que o Método da Descida Randômica tradicional, em contrapartida, como expõe Souza [2007], este método não garante que o ótimo local seja encontrado. De qualquer forma, é uma heurística interessante principalmente ao se tratar de algoritmos genéticos que frisam muito pelo conceito da diversidade.

A parceria algoritmo genético e busca local é promissora visto que formam um par poderoso na busca pelos melhores indivíduos da população. O algoritmo genético em toda sua sofisticação trabalha com os indivíduos de modo a aperfeiçoá-los e obter uma população cada vez mais resistente e a busca local colabora em localizar os melhores indivíduos de uma pequena região, fazendo um rastreamento refinado na população que acabou de ser constituída.

Os algoritmos genéticos se propõem a resolver problemas NP dificeis num tempo de execução menor quando comparados com os métodos exatos. Mesmo na maioria das vezes tendo uma perfomance mais arrojada que os algoritmos exatos, em alguns casos os algoritmos genéticos exigem um tempo relevante para obter a solução final. Tendo em vista este esforço, e por se tratar de uma base de dados com cotações históricas de 7 anos, justifica-se a opção por utilizar a busca local da Descida Randômica, que é um dos métodos de busca local mais rápidos.

A parceria algoritmo genético e busca local já é utilizada na literatura. Mourão [2009], utilizou algoritmo genético associado com a busca local *Iterated Local Search* no problema Fluxo Multiproduto e do Problema Multiobjetivo do Fluxo Multiproduto e obteve resultados melhores que os existentes na literatura para problemas exatos. O algoritmo proposto por Mourão [2009] se mostou eficiente para $93,75\%$ das instâncias testadas. Mourão et al. [2009] utilizaram algoritmo genético associado com o método da Descida Randômica para resolver o Problema de Fluxo Multiproduto Inteiro. Neste caso, a Descida Randômica foi utilizada como busca local nos indivíduos da população inicial. O método proposto obteve soluções próximas das ótimas para a maior parte das instâncias, sendo que o melhor resultado obtido foi para uma instância para a qual ainda não havia sido encontrada solução factível. Moura et al. [2010] apresentaram dois algoritmos genéticos, um com busca local da Descida Randômica e outro com busca local *Variable Neighborhood Search* para tratar da otimização estrutural de treliças. O desempenho do algoritmo evolutivo híbrido desenvolvido pelos autores não obteve bons resultados para o problema de treliça com nós fixos, ao passo que, obteve resultados melhores que os da literatura para o problema com estruturas com coordenadas nodais móveis.

No contexto da otimização de carteira de investimentos também existe a atuação da busca local. Maringer e Kellerer [2003] sugerem um algoritmo iterativo que usa estratégias de busca local num aprimoramento do *Simulated Annealing* num algoritmo altamente eficiente e confiável, com abertura para inclusão de outras restrições, além da restrição de cardinalidade e não negatividade. Em Streichert e Tanaka-Yamawaki [2006] foi proposta a hibridização de um algoritmo evolucionário multiobjetivo com uma busca local feita com programação quadrática resultando num algoritmo memético multiobjetivo. O algoritmo memético foi eficiente para tratar o problema com restrições de cardinalidade mas enfrentou dificuldades ao lidar com um espaço de busca neutro. Em Mozafari et al. [2011] foi proposta um parceria entre *Improved Particle Swarm Optimization* e *Simulated Annealing* (IPSO-SA) sendo utilizado um *Simulated Annealing* modificado com forte poder de busca local. Esta parceria foi construída visando beneficiar-se das capacidades de exploração tanto do IPSO quanto do SA de forma a compensar as fragilidades de cada algoritmo. Já Baykasoğlu et al. [2015] utilizaram o *Greedy Randomized Adaptive Search*

https://proceedings.science/p/85475?lang=pt-br

Procedure (GRASP) para selecionar os ativos desejados para o portfolio, sendo auxiliado por duas buscas locais, uma simples que é acionada a cada execução (de acordo com uma probabilidade), chamada *Minor Local Search* e ao fim do algoritmo, uma busca local mais sofisticada que demanda um custo computacional maior, denominada *Major Local Search*.

3. Otimização de Carteira de Ações

Como já foi mencionado anteriormente, otimização de carteiras de ações visa maximizar o retorno e/ou minimizar o risco. Na prática, utiliza-se a série histórica dos preços de fechamento das empresas nas quais podem ocorrer o investimento, baseado nestes dados, procura-se "captar", de acordo com a definição do algoritmo, o comportamento destes retornos de forma que seja possível estabelecer uma perspectiva de retornos futuros. Com base nestas informações, é elaborada uma carteira para a qual, se forem mantidas as mesmas condições de mercado, tem o potencial de obter o menor risco possível, estabelecendo-se um retorno mínimo esperado.

Para Elton et al. [2004] retorno de uma carteira de ativos é a média ponderada dos retornos dos ativos individuais. Já para Soares [2011], retorno é definido como o total de ganhos ou perdas ocorridas após um dado período de tempo. Em termos matemáticos, geralmente o retorno de um ativo é definido da seguinte forma

$$R_t = \frac{P_t - P_{t-1}}{P_{t-1}}, \tag{1}$$

onde P_t é o preço de fechamento da ação deste ativo no instante t e P_{t-1} é o preço de fechamento no instante $t-1$.

Já o retorno da carteira é a soma ponderada dos retornos individuais, onde o peso de cada ativo é equivalente a proporção que este ativo ocupa na composição da carteira. O retorno da carteira pode ser obtido pela Equação (2).

$$\sum_{i=1}^{N} w_i \mu_i, \tag{2}$$

onde N é a quantidade de ativos que compõem a carteira, w_i é o percentual investido no ativo i e μ_i é a média do retorno do ativo i no período considerado. Como sugerido por Stanley [1999], para evidenciar as correlação entre os preços diários, o retorno dos ativos foi definido como

$$R_i(t) = ln(fechamento(t)) - ln(fechamento(t-1)).$$

Segundo Gonçalves Jr et al. [2002], o risco de um investimento está ligado à probabilidade de se ganhar menos do que o esperado. Neste trabalho, a medida de risco assumida foi o desvio padrão. Markowitz [1952] mostrou que a variância (em consequência, o desvio padrão) pode ser estimada a partir da dispersão dos retornos das ações em relação aos retornos médios, mais precisamente, a variância de uma carteira pode ser calculada conforme a Equação (3).

$$\sigma = \sqrt{\sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} \sigma_{ij} w_i w_j}, \tag{3}$$

onde w_i é o percentual investido no ativo i, σ_{ij} é a covariância entre os ativos i e j e σ é o desvio padrão da carteira.

O modelo para otimização de carteiras que será utilizado neste trabalho é um modelo mono-objetivo de minimização do risco. No entanto, é importante levar-se em consideração os valores de retorno associados a cada risco. Por isso, o retorno foi assumido como uma restrição e acrescentado como uma penalidade na função objetivo. O modelo completo utilizado na otimização está representado nas Equações (4) e (5).

https://proceedings.science/p/85475?lang=pt-br

$$\min_{w_1,\cdots,w_N} \alpha_1 \sqrt{\sum_{j=1}^{N}\sum_{i=1}^{N} \sigma_{ij} w_i w_j} + \alpha_2 \sum_{i=1}^{N} \mu_i w_i \tag{4}$$

$$sujeito\ a: \begin{cases} \sum_{i=1}^{N} w_i = 1 \\ w_i \geq 0, \ \ i = 1, \cdots, N \end{cases} \tag{5}$$

Onde $\sum_{i=1}^{N} w_i = 1$ significa que 100% do capital disponível será investido. $w_i \geq 0$ significa que o peso investido em cada ativo deve ser não negativo, isto é, não é permitido venda a descoberto.

A otimização multiobjetivo foi estabelecida pelos modelos descritos nas Equações (9), (10) e (11).

$$\min_{w_1,\cdots,w_N} \sum_{j=1}^{N}\sum_{i=1}^{N} w_i w_j \sigma_{ij} \tag{6}$$

$$\max_{w_1,\cdots,w_N} \sum_{i=1}^{N} w_i \mu_i \tag{7}$$

$$sujeito\ a: \begin{cases} \sum_{i=1}^{N} w_i = 1 \\ w_i \geq 0, i = 1, \cdots, N \end{cases} \tag{8}$$

A otimização multiobjetivo foi estabelecida pelos modelos descritos nas Equações (9), (10) e (11). É interessante ressaltar que Deb [2011] estabelece como um dos propósitos da otimização multiobjetivo encontrar um conjunto de soluções que são diversas o suficiente para representar o traço completo da fronteira de Pareto Ótimo.

$$\min_{w_1,\cdots,w_N} \sum_{j=1}^{N}\sum_{i=1}^{N} w_i w_j \sigma_{ij} \tag{9}$$

$$\max_{w_1,\cdots,w_N} \sum_{i=1}^{N} w_i \mu_i \tag{10}$$

$$sujeito\ a: \begin{cases} \sum_{i=1}^{N} w_i = 1 \\ w_i \geq 0, i = 1, \cdots, N \end{cases} \tag{11}$$

4. Metodologia

Como entrada dos algoritmos foram utilizados os preços de fechamento anual de cada ativo, sendo que foram considerados aqueles ativos presentes em todas as composições do IBOVESPA para o período considerado. Foram implementados dois algoritmos genéticos, um Algoritmo Genético Básico e um Algoritmo Genético com a busca local Descida Randômica. A representação utilizada nos algoritmos genéticos foi real, ou seja, o cromossomo é representado por um vetor de valores reais, cujos valores das coordenadas são os pesos que o respectivo ativo deve ter na carteira.

Para ambos os algoritmos a seleção foi realizada através de roleta. O cruzamento foi cruzamento arimético completo com o valor de α gerado aleatoriamente, isto é, $filho1 =$

https://proceedings.science/p/85475?lang=pt-br

$\alpha pai1 + (1 - \alpha)pai2$ e $filho2 = (1 - \alpha)pai1 + \alpha pai2$. A mutação ocorreu através de um operador uniforme, que seleciona um dos componentes do cromossomo aleatoriamente e deste gera um individuo em que o cromossomo representa um valor obtido dentro da escala de seus valores possíveis. Ao início de cada geração foi selecionado o melhor indivíduo (melhor *fitness*) o qual foi mantido na geração seguinte realizando assim o elistimo para um indivíduo. Os dois algoritmos diferem-se essencialmente pela busca local.

A busca local realizada foi a Descida Randômica. A ideia do método da Descida Randômica é procurar vizinhos de um indivíduo e substituir o indivíduo pelo vizinho caso o vizinho seja melhor. Selecionado o indivíduo e iniciado o processo, se o vizinho gerado não for melhor que o indivíduo atual, então é gerado um novo vizinho. O processo é interrompido quando se atinge um número máximo de "buscas", definido pelo parâmetro *itermax*. O pseudocódigo do algoritmo genético com a busca local pode ser visto abaixo:

```
Inicializa populacao
Avalia populacao
Guarda Melhor Individuo
Enquanto(contador<criterioParada)
    Seleciona individuos para cruzamento
    Realiza cruzamento
    Realiza mutacao
    Atualiza populacao
    Avalia populacao
    %Busca local
    Se (número da geração é multiplo de cinco)
        MelhorIndividuo=IndividuoComMenorFitness
        DescidaRandomica(MelhorIndividuo)
        Escolhe quatro individuos
        DescidaRandomica(cada individuo)
        Se (vizinho é melhor que indivíduo)
            substitui individuo selecionado pelo seu vizinho
        Fim
    Fim
    guarda o melhor individuo desta geracao
    insere o melhor individuo da geracao anterior na populacao
Fim

retorna populacao
```

O método da Descida Randômica utilizado neste trabalho foi executado a cada cinco gerações sendo realizado no melhor indivíduo de cada geração e em outros quatro indivíduos selecionados aleatoriamente, de forma a potencializar o refinamento da busca, porque ao mesmo tempo que acontecerá um investimento na busca da vizinhança do melhor indivíduo também haverá um investimento na busca da vizinhança de outros quatro indivíduos e esta diversidade de pontos torna a busca local mais promissora. O movimento realizado para gerar o vizinho do indivíduo foi a troca de cinco coordenadas escolhidas aleatoriamente. O parâmetro *itermax* assumiu valor 20, isto é, o método da Descida Randômica foi definido para encerrar quando não fosse encontrado um vizinho melhor em 20 "buscas".

Para a realização da otimização multiobjetivo foi utilizado o método de escalarização P_λ. A função objetivo foi definida como $\overline{f}(w) = -\lambda retorno(w) + (1-\lambda) risco(w)$, sendo λ um vetor de tamanho 100 com suas coordenadas igualmente espaçadas entre 0 e 1, desta forma a Fronteira de Pareto gerada pela otimização contém 100 pontos. Cada ponto da Fronteira de Pareto foi gerado através da otimização da função objetivo $\overline{f}$ pelo método da busca local Descida Randômica com os mesmos parâmetros da taxa de cruzamento, taxa de mutação, tamanho da população e quantidade de gerações definidos para os algoritmos mono-objetivo. Os valores dos parâmetros taxa de mutação, taxa de cruzamento e tamanho de população foram mantidos constantes em 0.1, 0.8 e 100, respectivamente. Os pesos α_1 e α_2 das funções objetivo na Equação (4) foram ambos iguais a um. O critério de parada foi atingir a quantidade de 15000 avaliações da função objetivo. Foi escolhido este critério de parada por ser um critério que permite comparar de forma equânime os algoritmos:

https://proceedings.science/p/85475?lang=pt-br

com a mesma quantidade de avaliações da função objetivo qual algoritmo obteve melhor desempenho?

De acordo com Jiang et al. [2014], a s-metric indica a distribuição e espalhamento das soluções no conjunto de soluções ótimas obtidas: S. Esta métrica calcula a distribuição entre as soluções da fronteira de Pareto através da diferença da distância Euclidiana de soluções consecutivas com a média das distâncias:

$$\Delta(S) = \sum_{i=1}^{|S|-1} \frac{(d_i - \overline{d})}{|S| - 1},$$

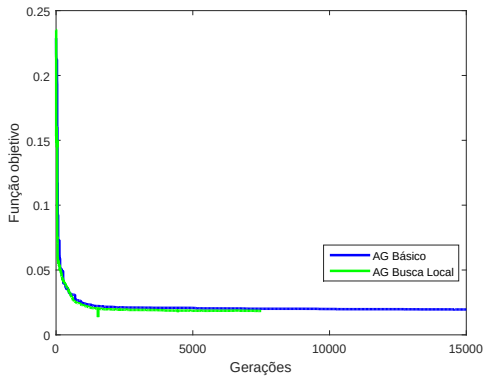
onde d_i é a distância Euclidiana entre soluções consecutivas em S e $\overline{d}$ é a média das d_i.

Se todas as soluções estão à uma mesma distância, então $d_i - \overline{d} = 0$ e, consequentemente $\Delta(S) = 0$ o que configura uma distribuição perfeita. As soluções consecutivas foram obtidas a partir da ordenação das soluções em relação ao risco. Ao submeter a solução obtida à s-metric, é possível analisar a diversidade desse conjunto de solução. De acordo com a definição da *s-metric*, quanto mais próximo de zero for a medida da métrica, mais dispersas estarão as soluções, o que indica melhor representação do conjunto Pareto ótimo. As soluções obtidas pela otimização foram submetidas à métrica de avaliação s-metric.

5. Resultados

Foram implementados em Matlab duas versões de algoritmos genéticos para o problema de otimização proposto, uma versão de um algoritmo genético básico, uma versão de um algoritmo genético com busca local. Nos algoritmos mono-objetivos, a fim de verificar a influência da busca local na qualidade da resposta do algoritmo genético ambos os algotimos foram executados trinta vezes e foi armazenado o melhor individuo obtido em cada execução.

Figura 1: Análise de convergência



Como o algoritmo com busca local recorre mais vezes à avaliação da função objetivo ele é concluído com uma quantidade de gerações inferior que as demandadas pelo algoritmo básico, este fato está ilustrado na Figura 1. Nesta mesma figura é possível observar que os valores da linha verde encontram-se abaixo dos valores da linha azul, o que mostra que o algoritmo com busca local alcançou menores valores para a função objetivo e sendo este um problema de minimização, há um indício que o algoritmo com busca local obteve um desempenho melhor.

A Figura 2 apresenta um boxplot cuja variável resposta é o menor valor de função objetivo em cada execução. Observa-se que o boxplot (2) encontra-se comparativamente abaixo do boxplot (1), o que indica que os valores da função objetivo obtidos pelo algoritmo com busca local são evidentemente menores que aqueles obtidos pelo algotimo básico. Este indício foi comprovado por um teste *t-student* que comprovou que existem evidências estatísticas com 95% de cofiança que os valores da função objetivo obtidos pelos algoritmos são distintos, ou seja, o desempenho do algoritmo com busca local é significativamente melhor que o desempenho do algoritmo básico, mostrando que a busca local foi eficiente, encontrando indivíduos melhores quando acionada.

Outro fator importante para ser levado em consideração é o tempo empenhado por cada algoritmo. Na Figura 3 encontra-se o gráfico das probabilidades empíricas em termos do tempo de execução dos dois algoritmos. Pode-se perceber que o algoritmo genético com busca local demanda tempos menores para concluir o processo. Sendo assim, além de obter melhor desempenho em termos de qualidade de solução, ele o faz com uma exigência de tempo menor.

https://proceedings.science/p/85475?lang=pt-br

Figura 2: Boxplot para comparação dos valores da função objetivo

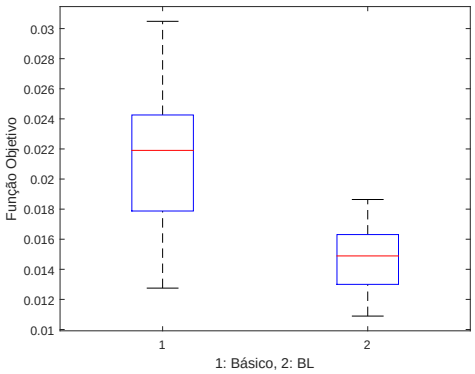
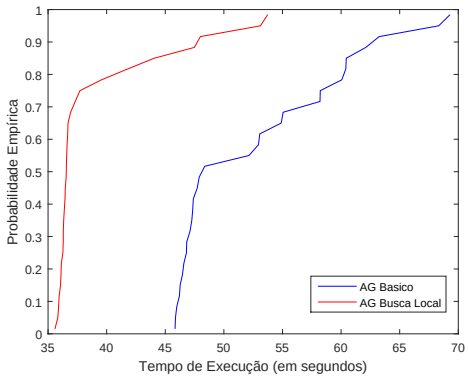


Figura 3: Probabilidade empírica em termos do tempo de execução



Para analisar os aspectos dos ativos selecionados pela otimização foram selecionadas cinco carteiras geradas durante as simulações, lembrando que foi armazenada a melhor carteira de cada simulação. Destas cinco carteiras foram tomadas as médias dos pesos propostos para cada ativo. Tanto o algoritmo básico quanto o algoritmo com busca local reduziram consideravelmente a quantidade de ativos que compõem a carteira. A base de dados utilizada era composta por cinquenta ativos, destes cinquenta o algoritmo básico selecionou quinze ativos e o algoritmo com busca local selecionou onze ativos. Mesmo que a cardinalidade (quantidade de ativos que compõem a carteira) não tenha sido adotada como restrição, os algoritmos convergiram para carteiras que concentravam mais os pesos em menos ativos. O fato da carteira conter menos ativos favorece no que diz respeito ao custo envolvido na compra de cada ativo, que neste caso será reduzido, pois o custo é proporcional à quantidade de ativos. Ainda, como todas as carteiras contaram com mais de dez ativos, continuou existindo o princípio da diversificação defendido por Markowitz, o que mantém a exposição ao risco num cenário de segurança. Na Tabela 1 encontram-se os ativos que tiveram peso maior que cinco nas carteiras propostas, seguidos dos valores dos pesos.

Tabela 1: Empresas com maior participação nas carteiras propostas

Básico	Busca Local
BRGE6 (7%)	ENMT3 (5%)
ENMT3 (9%)	EMBR3 (12%)
EALT4 (16%)	EALT4 (13%)
CIQU3 (25%)	CIQU3 (42%)
EMBR3 (26%)	

A Tabela 2 apresenta os valores de risco e retorno de cada ativo no período analisado. É importante salientar que os algoritmos minimizaram o risco levando em consideração os valores de retorno. Por isso, ao analisar o risco *versus* retorno não é possível firmar-se às informações dos maiores retornos ou menores riscos, pois além de levar essas informações em consideração, os algoritmos avaliam também a interação

https://proceedings.science/p/85475?lang=pt-br

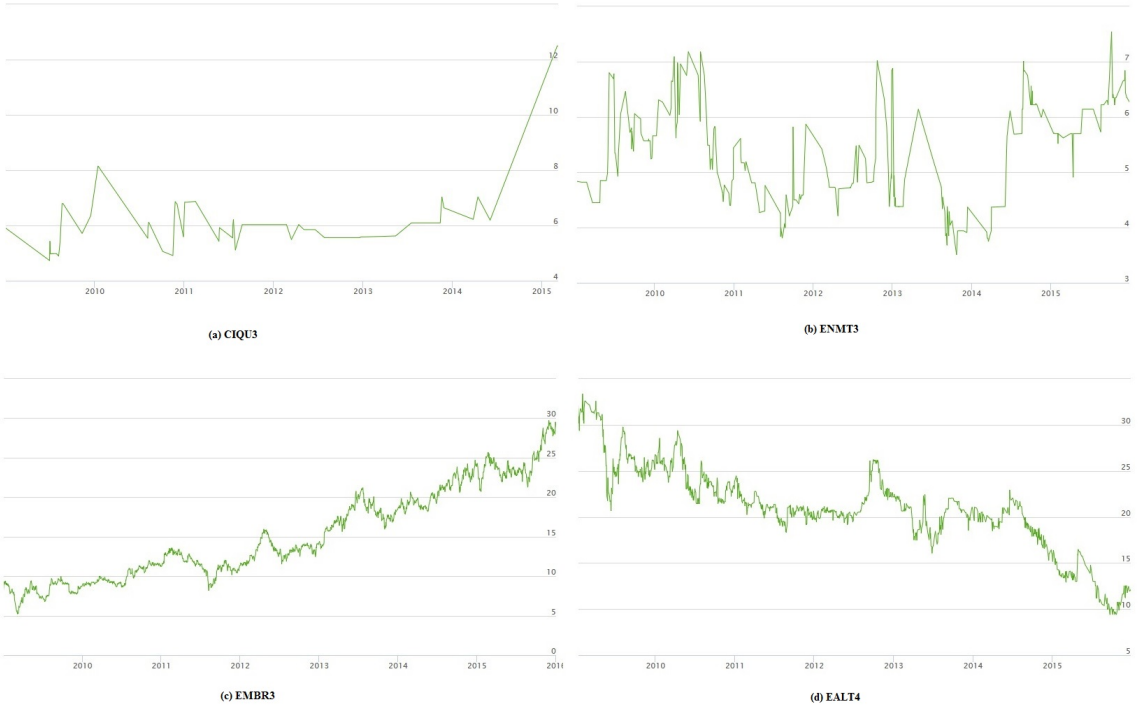
entre esses valores.

Tabela 2: Valores dos retornos médios e riscos médios no período analisado

BRGE6	Retorno	0%
	Risco	2%
CIQU3	Retorno	2%
	Risco	5%
EALT4	Retorno	-23%
	Risco	2%
EMBR3	Retorno	12%
	Risco	1%
ENMT3	Retorno	-5%
	Risco	8%

Como ambos os algoritmos tiveram a tendência de escolher os mesmos ativos para receber as maiores proporções na composição da carteira, possivelmente esses ativos possuem características que influenciaram positivamente os algoritmos na tomada de decisão. A Figura 4 trás a evolução dos preços de fechamento dos quatro ativos que apresentaram maiores participações propostas. Ao considerar-se a diferença entre os preços de fechamento do início e do fim do perído percebe-se que CIQU3, ENMT3 e EMBR3 tiveram resultado positivo, com grande destaque para EMBR3 que apresentou mais de 500% de aumento, ao passo que EALT4 teve mais de 200% de desvalorização. Certamente, o baixo risco de EALT4 provocou um equilíbrio na interação risco *versus* retorno.

Figura 4: Evolução do preço dos ativos



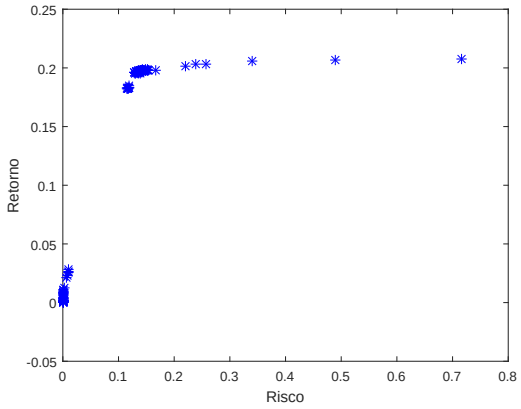
Fonte: Imagens retiradas do site Fundamentus [2018].

Por outro lado, observando o fato que os algoritmos escolheram ativos semelhantes mas obtiveram diferença significativa no desempenho do desempenho das carteiras, isso muito provavelmente ocorreu porque apesar de terem escolhido ativos semelhantes, o peso atribuído a cada ativo foi diferente. Assim, o algoritmo com busca local obteve sucesso no momento que tomou decisões acertadas ao balancear os pesos dos ativos. Uma vez que os mesmos ativos foram contemplados pelos dois algoritmos significa que para a base de dados analisada, essas eram realmente as melhores escolhas, sendo o segundo fator de decisão a distribuição de pesos das carteiras.

https://proceedings.science/p/85475?lang=pt-br

A otimização do modelo multiobjetivo forneceu a Fronteira de Pareto apresentado pela Figura 5. Pode-se perceber que a fronteira é constituída por pontos espalhados por todo o espaço dos objetivos. Esses pontos foram submetidos à métrica de avaliação s-metric e foi obtido valor de *s-metric* muito próximo de zero, o que caracteriza que as soluções possuem qualidade suficiente para representar substancialmente a Fronteira Pareto Ótimo. Ainda, os pontos que constituem a Fronteira de Pareto descrita na Figura 5 são pontos não dominados, isto é, dentre esses pontos não existe um ponto que seja inferior nos dois objetivos quando comparados com os demais. Com tudo, a busca local Descida Randômica mostra-se mais uma vez, indica para lidar com o problema de otimização de carteiras de investimentos, pois conseguiu atender bem os propósitos de uma otimização multiobjetivo: fornecer um conjunto de soluções não dominadas e capazes de representar a Fronteira de Pareto.

Figura 5: Fronteira de Pareto



Para a análise sobre as carteiras propostas pelo algoritmo multiobjetivo, foram selecionadas aleatoriamente cinco carteiras da Fronteira de Pareto. O retorno e o risco dessas cinco carteiras, constam na Tabela 3. Pode-se perceber que todos os retornos foram positivos e os valores do risco foram razoavelmente baixos, indicando uma bom desempenho para o algoritmo multiobjetivo com as associações do método P_λ e da busca local Descida Randômica.

Tabela 3: Valores dos retornos e riscos das carteiras

Carteira 1	Retorno	$0,7\%$
	Risco	$1,5\%$
Carteira 2	Retorno	$9,4\%$
	Risco	$0,9\%$
Carteira 3	Retorno	$12,26\%$
	Risco	$1,2\%$
Carteira 4	Retorno	$10,4\%$
	Risco	$0,9\%$
Carteira 5	Retorno	$1,5\%$
	Risco	$1,5\%$

Verificando o peso atribuído aos ativos para cada carteira constatou-se que a cardinalidade das carteiras concentrou-se em torno de 12 ativos e que as carteiras da Fronteira de Pareto eram constituídas pelos mesmos ativos sugeridos pelos algoritmos mono-objetivo, alterando os pesos atribuídos. As concentrações (médias) superiores a 5% estão relacionadas na Tabela 4.

Tabela 4: Empresas (pesos) de carteiras da fronteira

CIQU3 (35%)
EALT4 (22%)
EMBR3 (17%)
ENMT3 (8%)

https://proceedings.science/p/85475?lang=pt-br

6. Conclusão

Para problemas de seleção de carteiras procuram-se opções de investimentos que fornecem o maior retorno possível para um nível de risco aceitável ou o menor risco possível para um nível de retorno almejado. Considerando a otimização mono-objetivo, neste trabalho foi implementado um algoritmo genético com a busca local Descida Randômica no intuito de obter o menor risco de uma carteira de investimento. A fim de levar o retorno em consideração no processo de otimização, foi acrescentada uma parcela do retorno na função objetivo. Foram analisados os menores valores obtidos para a função objetivo por cada algoritmo. Através do teste de hipótese $t - student$ foi possível constatar ao nível de significância de 5% que os valores obtidos para a função objetivo pelo algoritmo com busca local são significativamente diferentes àqueles obtidos pelo algoritmo genético básico, ainda constatou-se que o tempo despendido pelo algoritmo com busca local é menor que o do algoritmo básico. Ambos os algoritmos reduziram a cardinalidade das carteiras propostas, optando por escolherem ativos semelhantes na composição das carteiras, no entanto atribuíram pesos diferenes aos ativos, esta decisão foi favorável às escolhas do algoritmo com busca local. Por sua vez, a otimização multiobjetivo foi realizada pelo método de escalarização P_λ valendo-se da otimização pela busca local. As soluções obtidas foram satisfatórias uma vez que tiveram qualidade suficente para representar substancialmente a Fronteira de Pareto Ótimo além de não apresentar pontos dominados, além de apresentarem valores siginigicativos para o risco e retorno das carteiras analisadas.

O procedimento utilizado neste artigo pode ser utilizado na prática para auxiliar investidores na seleção de suas carteiras de ações. Como sugestões para trabalhos futuros podem ser utilizadas outras medidas de risco, conhecidas como *downside risk*, que visam analisar somente as perdas ocorridas, diferente do desvio padrão que trata perdas e ganhos da mesma maneira.

Agradecimento

Agradeço ao CEFET/MG e ao IFMG *Campus* Formiga pelo apoio no desenvolvimento deste trabalho.

Referências

Assaf Neto, A. (1999). *Mercado Financeiro*. Atlas, São Paulo, Brasil, 1st edition.

Baykasoğlu, A., Yunusoglu, M. G., e Özsoydan, F. B. (2015). A grasp based solution approach to solve cardinality constrained portfolio optimization problems. *Computers & Industrial Engineering*, 90:339–351.

Deb, K. (2011). Multi-objective optimization using evolutionary algorithms: an introduction. *Multi-objective evolutionary optimisation for product design and manufacturing*, p. 1–24.

Elton, E., Gruber, M., e Brown, S. (2004). *Moderna Teoria de Carteiras e Análise de Investimentos*. Atlas, São Paulo, Brasil.

Fundamentus (2018). Fundamentus invista consciente. `http://www.fundamentus.com.br/`. Acessado: 2018-03-22.

Gonçalves Jr, C., Pamplona, E. O., e Montevechi, J. (2002). Seleção de carteiras através do modelo de markowitz para pequenos investidores (com o uso de planilhas eletrônicas). In *IX Simpep*, Bauru, Brasil.

Jiang, S., Ong, Y.-S., Zhang, J., e Feng, L. (2014). Consistencies and contradictions of performance metrics in multiobjective optimization. *IEEE transactions on cybernetics*, 44(12):2391–2404.

Maringer, D. e Kellerer, H. (2003). Optimization of cardinality constrained portfolios with a hybrid local search algorithm. *Or Spectrum*, 25(4):481–495.

Markowitz, H. (1952). Portfolio selection. *The journal of finance*, 7(1):77–91.

Moura, J. G., Moita, G. F., de Souza, S. R., e Temponi, E. C. C. (2010). Otimização estrutural de treliças utilizando algoritmos evolutivos híbridos. In *VI Congresso Nacional de Engenharia Mecânica*, Campina Grande, Brasil.

Mourão, F. (2009). *Aplicação de Métodos Heurísticos aos Problemas de Fluxo Multiproduto Mono-objetivo e Multiobjetivo*. PhD thesis, Centro Federal de Educação Tecnológica, Belo Horizonte, Brasil.

https://proceedings.science/p/85475?lang=pt-br

Mourão, F., Souza, S., e Silva, A. (2009). Aplicação de algoritmo evolucionário populacional ao problema de fluxo multiproduto inteiro. *TEMA*, 10(1):41–50.

Mozafari, M., Jolai, F., e Tafazzoli, S. (2011). A new ipso-sa approach for cardinality constrained portfolio optimization. *International Journal of Industrial Engineering Computations*, 2(2):249–262.

Oliveira, M. S. (2016). *Análise Comparativa entre medidas de risco na otimização multiobjetivo de carteira de ações com restrição de cardinalidade*. PhD thesis, Centro Federal de Educação Tecnológica, Belo Horizonte, Brasil.

Soares, V. (2011). *Aplicações do Problema de Otimização de Carteiras de Investimentos*. PhD thesis, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, Brasil.

Souza, M. (2007). Inteligência computacional para otimização. Ouro Preto, Brasil.

Stanley, R. N. M. H. (1999). *Introduction to econophysics: correlations and complexity in finance*. Cambridge University Press, Cambridge, Reino Unido.

Streichert, F. e Tanaka-Yamawaki, M. (2006). The effect of local search on the constrained portfolio selection problem. In *Evolutionary Computation, 2006. CEC 2006. IEEE Congress on*, p. 2368–2374. IEEE.

https://proceedings.science/p/85475?lang=pt-br