

Um modelo de programação linear inteira mista para o problema de múltiplos caixeiros viajantes com cobertura de apoio

Olinto César Bassi de Araújo
Guilherme Dhein

Colégio Técnico Industrial de Santa Maria - UFSM
{olinto, gdhein}@ctism.ufsm.br

Alberto Francisco Kummer Neto
Instituto de Informática - UFRGS
alberto@inf.ufsm.br

Mateus Pedroso Zanini
Programa de Pós-graduação em Engenharia de Produção - UFSM
programmer.mateus@gmail.com

RESUMO

Neste trabalho apresentamos um modelo de programação inteira para uma variação do Problema de Múltiplos Caixeiros Viajantes, denominada Problema de Múltiplos Caixeiros Viajantes com Cobertura de Apoio. Nesse problema, os veículos percorrem rotas nas quais a distância entre dois veículos quaisquer nunca ultrapassa uma distância máxima D . Nesta configuração, em caso de contingência envolvendo um veículo, todos os demais podem fornecer apoio, com tempo de resposta relacionado à distância máxima permitida. Experimentos computacionais foram realizados utilizando instâncias adaptadas da literatura. Os resultados demonstraram a coerência da formulação matemática, uma vez que as rotas obtidas apresentaram as características desejadas, nas quais os veículos mantêm uma distância relativa determinada de acordo com o valor do parâmetro D . Na versão atual, o modelo está restrito a tratar instâncias de tamanho bem moderado. No entanto, tanto o pré-processamento como o modelo proposto podem motivar pesquisas e orientar a construção de novos métodos de solução.

PALAVRAS CHAVE. múltiplos caixeiros viajantes, programação linear inteira mista, cobertura, sincronismo.

Área Principal: Logística e Transporte, Otimização Combinatória.

ABSTRACT

In this work we present a mixed integer programming model for a variation of the Multiple Traveling Salesman Problem, named Multiple Traveling Salesman with Backup Coverage. In this problem, vehicles travel routes where the distance between any two vehicles never surpasses a max distance D . Thus, in case of contingency involving a vehicle, all other vehicles can be used for backup, with response time related to the max distance allowed. Computational experiments were done using adapted instances from literature. The results show coherence with the mathematical formulation, since the routes exhibit desired synchronism features, in which the vehicles keeps a relative distance according to the value of the parameter D . In the current version, both the pre-processing and the suggested model might motivate research and guide the building of new solving methods.

KEYWORDS. multiple-travelling salesmen, mixed integer linear programming, covering, synchronism.

Main Area: Logistic and Transportation, Combinatorial Optimization.

1. Introdução

O Problema de Múltiplos Caixeiros Viajantes (PMCV) é uma generalização do conhecido Problema do Caixeiro Viajante (PCV) em que os clientes são distribuídos em várias rotas, atendidas por diferentes veículos ou caixeiros viajantes. Neste trabalho, é abordada uma nova generalização do PMCV chamada Problema de Múltiplos Caixeiros Viajantes com Cobertura de Apoio (PMCV-CA) [Dhein et al., aceito para publicação]. Neste problema, a distância instantânea entre quaisquer dois veículos não pode exceder uma distância máxima definida como parâmetro. Essa nova restrição obriga os veículos a viajarem relativamente perto uns dos outros. Em caso de contingência envolvendo um veículo, todos os demais podem ser usados para apoio, com um tempo de resposta relacionado à distância máxima permitida.

Comportamento de apoio mútuo é útil em atividades de roteamento reais realizadas em ambientes hostis. Como exemplo, é possível considerar a distribuição de ajuda humanitária em áreas de conflito, onde podem ocorrer ataques aos veículos com objetivo de roubo de carga ou simplesmente para evitar a chegada aos destinos planejados. Uma solução possível é todos os veículos viajarem juntos em formação de comboio para aumentar a segurança da carga, o que reduz a eficiência da distribuição, uma vez que todos os veículos viajam através de todos os pontos a serem atendidos. Um equilíbrio pode ser obtido se estes pontos de interesse forem distribuídos para serem visitados por diferentes veículos e todos forem mantidos próximos o suficiente (de acordo com a distância máxima definida) para que possam servir de apoio em caso de ataque a um deles. Esta política de cobertura também se aplica às atividades de segurança e de patrulhamento da polícia, em que são realizadas patrulhas em locais com altos níveis de criminalidade e há possibilidade de recepção hostil nesses pontos. Se uma patrulha é atacada, outras podem prestar auxílio prontamente devido à proximidade imposta.

A restrição de distância máxima relativa implica em novas características que são relevantes para a construção de soluções. No PMCV clássico, rotas estabelecidas como sequências de vértices próximos são interessantes porque apresentam arcos com baixos custos. Essas rotas são independentes, e uma modificação em uma delas pode ser avaliada localmente. No PMCV-CA, a proximidade entre vértices subsequentes também é importante, já que o objetivo igualmente é a minimização dos custos de deslocamento. Mas também é importante designar vértices com proximidade entre si a rotas diferentes, o que determina uma interdependência espacial entre as rotas. Soma-se à interdependência espacial uma interdependência temporal, pois a manutenção da característica de cobertura depende de que os veículos exibem uma sincronização na visita às regiões com proximidade espacial. Qualquer perturbação em uma rota altera todos os momentos das visitas aos vértices subsequentes e a sincronização pode ser facilmente perdida, de modo que mesmo pequenas modificações em uma boa solução podem resultar em infactibilidade.

Problemas com diferentes graus de interdependência entre rotas podem ser encontrados na literatura. Problemas com transferência de carga entre veículos [Mitrović-Minić and Laporte, 2006; Qu and Bard, 2012] são exemplos de interdependência assíncrona, já que diferentes veículos devem visitar os mesmos vértices em momentos diferentes, respeitando uma ordem de visita. A interdependência assíncrona também ocorre em [Fikar and Hirsch, 2015], em um problema que apresenta uma janela de tempo a ser observada entre duas visitas ao mesmo vértice, relacionada ao intervalo necessário para a realização uma tarefa no vértice. As visitas concomitantes ocorrem em problemas relacionados a emergências ou cuidados de saúde, conforme abordado em [Wex et al., 2013; Dohn et al., 2009]. Já o problema abordado em [Mankowska et al., 2014] admite tanto visitas síncronas quanto assíncronas.

A sincronização também pode ser associada a arcos que devem ser percorridos simultaneamente por mais de um veículo. Em [Drexler, 2013], veículos não autônomos devem ser puxados por veículos autônomos para se moverem no espaço, enquanto [Salazar-Aguilar et al., 2012] aborda um

problema de roteamento de arcos relacionado às operações de remoção de neve em ruas com várias pistas. Mesmo problemas de roteamento do arcos podem apresentar sincronização relacionada a vértices que devem ser visitados concomitantemente. Em aplicações de coleta de lixo, é possível considerar a transferência de resíduos de veículos menores para maiores em pontos de encontro, como em [Del Pia and Filippi, 2006; Rosa et al., 2002]. A mesma situação ocorre em problemas relacionadas à marcação de rodovias, como abordados em [Amaya et al., 2007, 2010; Salazar-Aguilar et al., 2013], em que os veículos de pintura encontram caminhões-tanques para serem recarregados.

Finalmente, a interdependência também pode ser encontrada em problemas onde são buscadas rotas ou caminhos dissimilares [Liu et al., 2016; Akgün et al., 2000]. Não há uma métrica geral estabelecida para quantificar a dissimilaridade, e diferentes alternativas são encontradas em [Lombard and Church, 1993; Dell’Olmo et al., 2005; Martí et al., 2009; Talarico et al., 2015; Ngueveu et al., 2010].

As características e dificuldades dos problemas de roteamento com sincronização são resumidas em [Drexl, 2012b]. Entretanto, é importante observar que nenhum desses problemas referidos impõe as mesmas características de sincronização impostas pelo PMCV-CA. Embora não existam restrições que definam situações como visitas concomitantes ao mesmo vértice ou travessia concomitante de um arco, o novo problema apresenta uma restrição que deve ser observada de forma contínua, através de todo o horizonte de roteamento e entre todos os pares de veículos. Neste caso, é exigido um sincronismo espacial e temporal, de modo que os veículos transitem, a todo momento, por caminhos próximos. É importante evidenciar que a proximidade é uma característica das rotas, e não de um veículo ou vértice em particular. Outro problema com a interdependência contínua pode ser encontrado em [Dhein et al., 2018], mas nesse problema as distâncias relativas entre pares de veículos são consideradas em uma função objetivo (de um problema bi-objetivo) a ser maximizada. Uma vez que não é uma restrição, nesse caso a interdependência não está relacionada com a factibilidade de soluções.

Neste trabalho é apresentado um modelo de programação linear inteira para o PMCV-CA. Restrições lineares para representar apropriadamente a cobertura de apoio são formuladas. Experimentos computacionais com o modelo proposto foram realizados utilizando o resolvidor CPLEX e instâncias modificadas do PCV obtidas na TSPLIB [Reinelt, 1991].

O trabalho está organizado como segue. Na Seção 2 o problema é descrito de forma detalhada, sendo explicitada as características que decorrem da cobertura de apoio. Na Seção 3 é descrito o modelo matemático e na Seção 4 são apresentados os resultados computacionais. Por fim, a Seção 5 discute as conclusões e trabalhos futuros.

2. Descrição do Problema

Conforme o PMCV, o PMCV-CA pode ser definido como o problema de encontrar rotas em um grafo $G = (V, A)$, em que $V = \{0, 1, \dots, n\}$ é o conjunto de $n + 1$ vértices e $A = \{(i, j) \mid i, j \in V\}$ é o conjunto de arcos que liga pares de vértices em V . Um custo c_{ij} está associado a cada arco $(i, j) \in A$ para representar o tempo de deslocamento de i a j . Uma solução é um conjunto de rotas, cada uma atribuída a um caixeiro viajante ou veículo do conjunto $K = \{1, \dots, m\}$. Todos os veículos partem do vértice 0, denominado garagem, e terminam suas rotas de volta à garagem. Cada vértice é visitado apenas uma vez por um único veículo.

No PMCV-CA, a distância instantânea entre quaisquer dois veículos não pode exceder uma distância máxima definida por um parâmetro D . Em outras palavras, há uma distância relativa máxima permitida para o par de veículos mais dispersos entre si. A avaliação das distâncias relativas entre pares de veículos começa com a partida concomitante da garagem e continua enquanto pelo menos um veículo permanecer em uma rota. Um par ordenado de coordenadas (x_i, y_i) é associado a cada vértice $i \in V$, permitindo o cálculo das posições dos veículos a qualquer momento.

Observe que dois veículos em trânsito não podem aumentar e em seguida reduzir a distância entre eles se as trajetórias são retilíneas (o oposto é possível: se eles cruzam suas trajetórias ou

se eles viajam trajetórias paralelas em direções opostas, por exemplo, a distância entre os veículos em um primeiro momento reduz e então aumenta novamente). Como os veículos percorrem arcos retos no PMCV-CA, as distâncias máximas ocorrem nos limites dos arcos, isto é, quando pelo menos um deles chega em um vértice e muda sua trajetória. Assim, a factibilidade da rota só precisa ser verificada nesses momentos: cada vez que um veículo atinge um vértice, as posições correntes dos outros veículos são avaliadas para verificação das distâncias relativas.

Similar ao PMCV, o objetivo do PMCV-CA é minimizar a soma das distâncias percorridas por todos os veículos. O problema é, obviamente, NP-difícil, porque cada instância de PMCV pode ser resolvida como uma instância de PMCV-CA em que D é grande o suficiente.

Para uma melhor compreensão das implicações da restrição que impõe a proximidade e também para ilustrar a relação do PMCV-CA com PCV e PMCV, consideremos novamente a atividade de patrulhamento da polícia anteriormente mencionada. Se a região a ser patrulhada é calma e segura, um planejador pode ignorar a cobertura de apoio fazendo $D = \infty$, e o problema se torna um PMCV tradicional. Por outro lado, se esses veículos se destinam a patrulhar uma região violenta e perigosa, o planejador pode considerar a possibilidade de enviá-los todos juntos, forçando os veículos a atuar como um comboio ($D = 0$). Nesse caso, a solução apresentará apenas uma rota, e o planejador estará lidando com uma instância do PCV, mas o custo de deslocamento das patrulhas será o custo total da solução PCV multiplicado pelo número de veículos, já que todos cumprem a mesma rota, viajando juntos.

A Figura 1 ilustra soluções para essas duas alternativas e para uma instância PMCV-CA, todas sobre o mesmo conjunto de vértices. A solução PCV foi obtida na TSPLIB e é ótima. As soluções PMCV e PMCV-CA ilustradas foram geradas por método heurístico [Dhein et al., aceito para publicação], e não há garantias de se tratarem de soluções ótimas.

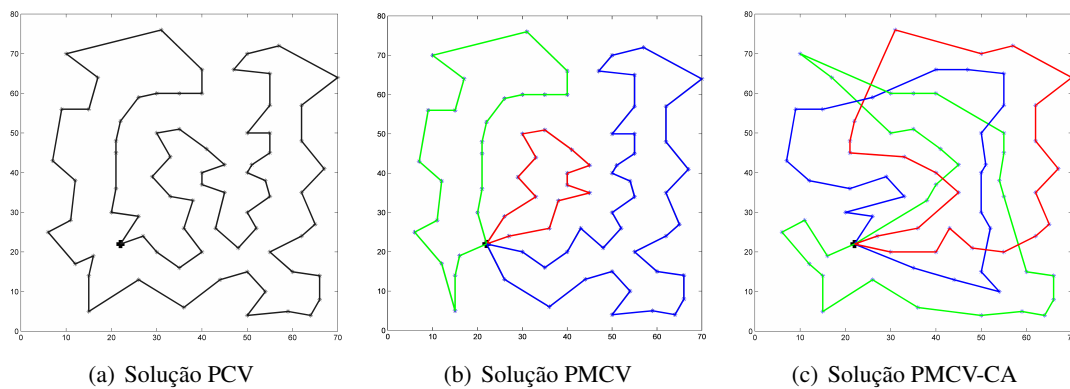


Figura 1: Soluções para o PCV, PMCV e PMCV-CA considerando 3 veículos e a instância *eil76* da TSPLIB. De acordo com a TSPLIB, a solução PCV tem valor de função objetivo igual a 538, no entanto, para fins de comparação, considerando 3 veículos em comboio, é possível tomar 1614 como custo total da atividade de patrulha. O custo total da solução PMCV é 571,93, e o custo total da solução PMCV-CA é 720,03.

Observe, no entanto, que cada vértice é visitado apenas uma vez no PMCV-CA. Assim, as instâncias do PMCV-CA com $D = 0$ apenas apresentam soluções factíveis para certas distribuições de vértices bastante específicas, nas quais existem vértices com coordenadas iguais. Na verdade, para instâncias usuais em que os vértices são distribuídos em uma área, há um intervalo de valores para D que não admite qualquer solução factível. Portanto, a solução do PCV ilustra uma situação extrema hipotética, na qual a cobertura de apoio é tão imperativa que todos os veículos viajam juntos com formação de comboio.

Finalmente, considere duas instâncias com os mesmos vértices e valores distintos para o parâmetro D . A solução ótima para a instância com D mais *apertado* é obviamente uma solução

factível para a instância com D mais *relaxado*. Portanto, a solução ótima para a segunda instância terá certamente um valor de função objetivo igual ou inferior à da primeira. Como o PMCV pode ser considerado como uma instância PMCV-CA que apresenta a máxima relaxação para D ($D = \infty$), a solução ótima do PMCV se coloca como um limitante inferior para o PMCV-CA, e representa outra situação extrema, em que os veículos não apresentam, necessariamente, qualquer agrupamento. O PMCV-CA pode ser colocado entre esses dois extremos, em que se busca um balanceamento entre o custo de uma solução na qual todos veículos viajam em comboio e o custo de outra na qual não há cobertura de apoio.

3. Modelo Matemático

As restrições do modelo matemático para o PMCV-CA podem, grosso modo, ser divididas em dois grupos: restrições relativas a definição das rotas dos caixeiros viajantes propriamente ditas e restrições relativas a cobertura de apoio ou sincronismo espacial e temporal.

A formulação de restrições de sincronismo espacial e temporal lineares demandam uma etapa de pré-processamento. Conforme já mencionado, dada a hipótese que os veículos percorrem trajetórias retilíneas, a factibilidade das rotas, no que se refere a distância relativa entre os veículos, só precisa ser verificada cada vez que um veículo chega em um vértice. Neste instante, as posições dos demais veículos devem ser determinadas para verificar as distâncias relativas.

Na etapa de pré-processamento, para cada vértice que requer cobertura de apoio, são identificados todos os arcos ou segmentos de arcos nos quais veículos podem transitar de modo a garantir que a distância entre qualquer veículo e o vértice não exceda o limite D . A Figura 2 exemplifica o procedimento. Uma instância com garagem e 8 vértices é apresentada na Figura 2(a). Na Figura 2(b) os arcos e segmentos de arcos que possibilitam cobertura de apoio ao vértice 3 são representados na cor vermelha. Observe que a circunferência delimita a área de cobertura, ou seja, qualquer veículo que transitar em um arco ou segmento de arco dentro do círculo estará a uma distância não superior ao limite D do vértice sobre o centro. Um arco (l, h) que está na área de cobertura ou dá suporte a segmento de arco que está na área de cobertura de um vértice $j \in V \setminus \{0\}$ é denotado por s_{lhj} . O conjunto de todos os arcos ou segmentos de arcos que proveem cobertura a um vértice $j \in V \setminus \{0\}$ é denotado por $\mathcal{A}_j$.

O sincronismo espacial entre as rotas é garantido quando há $m - 1$ veículos percorrendo arcos ou segmentos de arcos dentro da área de cobertura de um vértice visitado. No entanto, para que haja cobertura de apoio é exigido ambos sincronismos, espacial e temporal. Para garantir o sincronismo temporal é necessário determinar o tempo para que um veículo, partindo da origem de um arco que provê cobertura a um vértice, entre na área de cobertura deste vértice. Como exemplo, na Figura 2, considere o arco (2,4) que dá suporte a um segmento de arco que provê cobertura ao vértice 3. Como o vértice 2 não está na área de cobertura, é determinado o tempo para um veículo transitando sobre este arco entrar na área de cobertura (segmento de arco em vermelho). O tempo final para a cobertura do veículo que transita sobre o arco (2,4), neste exemplo, é o tempo necessário para chegar ao vértice 4. De um modo geral, considerando um arco $s_{lhj} \in \mathcal{A}_j$, o tempo para um veículo que se desloca sobre o arco (l, h) entrar na área de cobertura do vértice j é denotado por TS_{lhj} , e o tempo para deixar de fornecer cobertura é denotado por TE_{lhj} .

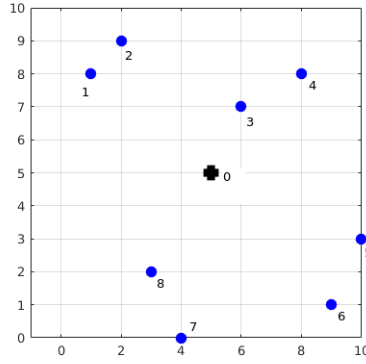
O modelo matemático para o PMCV-CA é formalizado a seguir, e será denotado por mCA. O custo c_{ij} que representa o tempo de deslocamento de i para j é considerado, sem perda de generalidade, igual a distância Euclidiana d_{ij} entre os vértices i e j .

Conjuntos

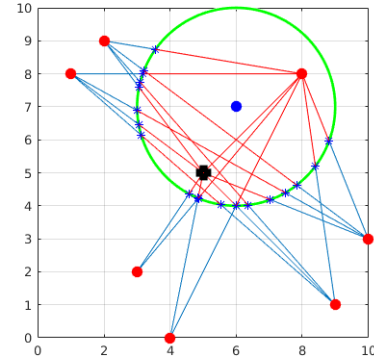
V : conjunto com $n + 1$ vértices;

A : conjunto de arcos que liga pares de vértices em V ;

$\mathcal{A}_j$: conjunto arcos e segmento de arcos que provêm cobertura ao ponto $j \in V \setminus \{0\}$.



(a) Instância



(b) Arcos e segmentos de arcos dentro da área de cobertura do vértice 3

Figura 2: Representação gráfica de uma etapa do pré-processamento para uma instância com garagem e 8 vértices.

Parâmetros

d_{ij} : distância Euclidiana entre dois pontos correspondentes ao vértices i e j do arco $(i, j) \in A$;

TS_{lhj} : tempo necessário para, partindo do vértice l , entrar no segmento de arco sobre o arco $(l, h) \in \mathcal{A}_j$ que provê cobertura ao vértice $j \in V \setminus \{0\}$;

TE_{lhj} : tempo necessário para, partindo do vértice l , sair do segmento de arco sobre o arco $(l, h) \in \mathcal{A}_j$ que provê cobertura ao vértice $j \in V \setminus \{0\}$;

M : um número suficientemente grande.

Variáveis

x_{ijk} : variável binária que determina o uso ($x_{ijk} = 1$) ou não ($x_{ijk} = 0$) do arco $(i, j) \in A$ pelo veículo $k \in K$;

t_i : variável contínua que indica o tempo de chegada no vértice $i \in V \setminus \{0\}$;

s_{lhj} : variável binária que indica se um veículo que percorre o arco $(l, h) \in \mathcal{A}_j$ provê ($s_{lhj} = 1$) ou não ($s_{lhj} = 0$) cobertura para o vértice $j \in V \setminus \{0\}$.

Modelo mCA

$$\min \sum_{i \in V} \sum_{j \in V} \sum_{k \in K} d_{ij} x_{ijk} \quad (1)$$

s.t.

$$\sum_{i \in V} \sum_{k \in K} x_{ijk} = 1 \quad \forall j \in V \setminus \{0\} \quad (2)$$

$$\sum_{i \in V} x_{ijk} - \sum_{i \in V} x_{jik} = 0 \quad \forall j \in V \setminus \{0\}, \forall k \in K \quad (3)$$

$$\sum_{j \in V} x_{0jk} = 1 \quad \forall k \in K \quad (4)$$

$$t_0 = 0 \quad (5)$$

$$t_j \geq t_i + d_{ij} - \left(1 - \sum_{k \in K} x_{ijk}\right) M \quad \forall i, j \in V : j > 0 \quad (6)$$

$$t_j \leq t_i + d_{ij} + \left(1 - \sum_{k \in K} x_{ijk}\right) M \quad \forall i, j \in V : j > 0 \quad (7)$$

$$\sum_{(l,h) \in \mathcal{A}_j} s_{lhj} = m - 1 \quad \forall j \in V \setminus \{0\}, \quad (8)$$

$$s_{lhj} \leq \sum_{k \in K} x_{lhk} \quad \forall j \in V \setminus \{0\}, \forall (l, h) \in \mathcal{A}_j \quad (9)$$

$$TS_{lhj} + t_l \leq t_j + (1 - s_{lhj})M \quad \forall j \in V \setminus \{0\}, \forall (l, h) \in \mathcal{A}_j \quad (10)$$

$$TE_{lhj} + t_l \geq t_j - (1 - s_{lhj})M \quad \forall j \in V \setminus \{0\}, \forall (l, h) \in \mathcal{A}_j \quad (11)$$

$$x_{ijk} \in \{0, 1\} \quad \forall i, j \in V, \forall k \in K \quad (12)$$

$$s_{lhj} \in \{0, 1\} \quad \forall j \in V \setminus \{0\}, \forall (l, h) \in \mathcal{A}_j \quad (13)$$

$$t_i \geq 0 \quad \forall i \in V \quad (14)$$

A função objetivo (1) minimiza a distância total percorrida pelos veículos. As restrições (2 - 7) compõem o grupo de restrições relacionadas à definição das rotas dos caixeiros. A restrição (2) determina que todo vértice, com exceção da garagem 0, tenha um predecessor. A restrição (3) é uma restrição de conservação de fluxo e garante que as rotas sejam conexas. A restrição (4) determina que todos os m veículos partam da garagem rumo a algum vértice. A restrição (5) define o tempo de início de todas as rotas em zero. As restrições (6 - 7) proíbem subciclos e determinam exatamente o tempo de chegada de um veículo em cada vértice, com exceção da garagem 0.

As restrições (8 - 11) compõem o grupo de restrições relacionadas a cobertura com apoio, garantindo sincronismo espacial e temporal. A restrição (8) determina que $m - 1$ veículos devem dar cobertura de apoio para o vértice $j \in V \setminus \{0\}$. É importante lembrar que a cobertura de apoio é uma característica das rotas, mas a factibilidade da solução só precisa ser verificada no momento que um vértice é visitado. A restrição (9) impõe que um arco só pode ser escolhido para dar cobertura se for percorrido por um veículo. As restrições (10 - 11) garantem o sincronismo temporal, ou seja, um veículo de apoio deve iniciar a percorrer um arco ou segmento de arco dentro da área de cobertura no momento exato da visita ao vértice ou em momento anterior (restrição 10), e sair da área de cobertura no momento ou depois do vértice ser visitado (restrição 11).

De acordo com a definição do PMCV-CA, existe a possibilidade de um veículo localizado na garagem fornecer cobertura de apoio a outros veículos que estão em campo. Essa situação pode ocorrer sempre que a garagem estiver dentro da área de cobertura de algum vértice. Neste caso, o instante em que o veículo chega na garagem é irrelevante, pois, a partir deste momento, este não visitará nenhum outro vértice. Por isso, de modo a garantir que a restrição (11) respeite a possibilidade de um veículo localizado na garagem fornecer cobertura a outro veículo, o parâmetro TE_{lhj} é definido com valor M sempre que o vértice h corresponder a garagem e estiver dentro da área de cobertura do vértice j .

Uma desigualdade válida pode ser acrescentada ao modelo a partir da observação que a escolha dos arcos de cobertura, definida de acordo com as variáveis s_{lhj} , não considera especificamente o veículo que fornece apoio. Para tanto, basta impor a restrição que, quando um veículo visita um determinado nó, os demais $m - 1$ veículos devem estar dentro da área de cobertura. Esta restrição pode ser estabelecida conforme segue.

$$\sum_{(l,h) \in \mathcal{A}_j} x_{lhk} \geq 1 - \sum_{i \in V : i \neq j} x_{ijk} \quad \forall j \in V \setminus \{0\}, \forall k \in K \quad (15)$$

É fácil verificar que a restrição (15) exige que um veículo percorra ao menos um arco ou segmento de arco dentro da área de cobertura de um ponto j sempre que o veículo não é aquele que visita o ponto j . Quando a restrição (15) for incluída no modelo, este será denotado por mCA^+ .

4. Resultados computacionais

Os testes foram realizados utilizando CPLEX 12.7.1.0 em um computador com processador Intel Quad-Core Xeon X3360, com 8 GB de memória RAM. O tempo máximo de execução para cada instância foi definido arbitrariamente como 1800 segundos.

As instâncias utilizadas correspondem a instâncias do PCV para as quais o vértice da garagem é aquele com maior distância média em relação aos demais vértices. Dada a dificuldade em resolver o modelo desenvolvido, as instâncias consideradas são de pequeno porte, com no máximo 16 vértices e 4 veículos. As instâncias *burma14* e *ulysses16* são disponibilizadas na TSPLIB, com 14 e 16 vértices respectivamente, e a instância *PI*, com 15 vértices, é disponibilizada em <https://people.sc.fsu.edu/~jburkardt/datasets/tsp/tsp.html>. Para cada instância do PCV foram derivadas instâncias do PMCV-CA com 2, 3 ou 4 veículos e quatro possíveis valores para o parâmetro D , totalizando 36 casos de estudo. Um desses quatro valores é grande o suficiente para que a cobertura se torne irrelevante, de modo que a solução do PMCV-CA seja idêntica ao do PMCV.

A Tabela 1 apresenta os resultados computacionais. As três primeiras colunas definem a instância de teste representada em cada linha, a partir da definição da instância do PCV original, o valor definido para o parâmetro D e o número de veículos. Nas quatro colunas seguintes são especificados valores referentes a testes para os modelos mCA^+ e mCA . Para cada teste são apresentados o valor de função objetivo da solução encontrada (FO), o tempo de processamento para encontrar uma solução factível (TF) e o tempo total de execução (T), ambos dados em segundos, e o *gap* do CPLEX. Na última coluna consta os valores de função objetivo obtidos pelo Algoritmo Genético com Busca Local (AGBL) proposto em [Dhein et al., aceito para publicação].

Os resultados demonstram a dificuldade em resolver os modelos utilizando pacotes comerciais de otimização, no caso, o CPLEX. Os resultados referentes a meta-heurística AGBL foram obtidos com tempo limite de execução de um minuto, muito embora, via de regra, nos primeiros segundos de execução soluções melhores que os modelos sejam encontradas. Destaque-se ainda que a meta-heurística apresenta uma série de características especializadas para a manutenção do sincronismo, de modo que valores de D muito grandes, que tornam a cobertura irrelevante, reduzem a vantagem do método.

Considerando os resultados obtidos a partir das execuções dos modelos, é necessário destacar que apenas as execuções da instância *PI* com valores elevados para D resultaram nas soluções ótimas. Todas as demais execuções fizeram uso de todo o tempo de 1800 segundos disponibilizado, e muitas vezes apresentaram resultados com GAP bastante elevado. Em um caso para o modelo mCA^+ e em três para o modelo mCA , não foram encontradas sequer soluções factíveis, situação identificada pela ausência de valores nos indicadores FO, TF e GAP. Ignorando as soluções ótimas e as infactíveis referidas, o GAP médio para as soluções do mCA^+ foi 50,71%, com valor máximo de 82,1%, enquanto para soluções do mCA esses valores foram respectivamente 52,81% e 83,0%. Se considerarmos que com o modelo mCA^+ não foi encontrada solução factível em apenas uma instância, contra 3 do mCA , a vantagem do primeiro sobre o segundo se torna mais evidente.

O ganho decorrente do uso da desigualdade válida também pode ser verificado quando são analisados os valores de função objetivo e de tempo necessário para encontrar solução factível. As soluções encontradas com o modelo mCA^+ apresentam melhor qualidade em 19 das 36 instâncias testadas (incluindo duas em que o mCA não encontrou solução factível), existe equivalência em 11 das instâncias (incluindo uma em que nenhum método encontrou solução factível) e as soluções obtidas com mCA levam vantagem nas 6 instâncias restantes. Com relação ao tempo para encontrar uma solução factível, em 16 oportunidades houve vantagem para execução com o modelo mCA^+ , 11 empates e 9 oportunidades com vantagem para execuções com o modelo mCA .

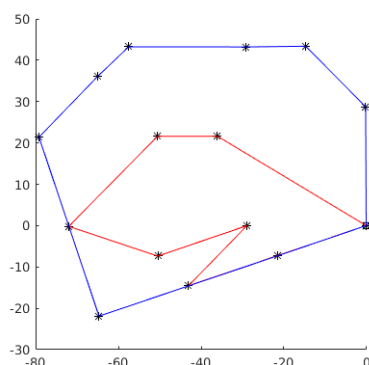
Tabela 1: soluções para as instâncias geradas a partir da *burma14*

Instance	D	m	mCA ⁺				mCA				AGBL FO
			FO	TF(s)	T(s)	GAP(%)	FO	TF(s)	T(s)	GAP(%)	
burma14	6	2	44,1	0,0	1800,0	36,9	44,7	0,0	1800,0	39,9	44,1
		3	63,0	2,4	1800,0	58,7	65,5	309,9	1800,0	63,2	59,4
		4	79,2	8,4	1800,0	63,7	81,9	1078,6	1800,0	70,6	76,3
	7	2	46,0	1,1	1800,0	42,5	46,5	0,0	1800,0	43,3	44,1
		3	62,9	5,6	1800,0	59,1	64,9	24,4	1800,0	61,48	58,26
		4	77,4	7,9	1800,0	63,8	81,7	1213,1	1800,0	70,6	74,07
	8	2	45,3	0,9	1800,0	40,5	45,3	0,8	1800,0	41,8	44,1
		3	59,8	7,1	1800,0	54,4	59,2	1,9	1800,0	57,0	57,3
		4	75,8	7,4	1800,0	66,6	86,9	201,6	1800,0	72,3	72,3
	INF	2	30,9	0,0	1800,0	6,2	30,9	0,0	1800,0	6,4	30,9
		3	30,9	0,0	1800,0	10,4	30,9	0,0	1800,0	12,3	30,9
		4	30,9	0,0	1800,0	15,8	30,9	0,0	1800,0	13,6	30,9
P1	40	2	436	1,3	1800,0	24,3	448	0,7	1800,0	32,6	393
		3	639	1249,5	1800,0	46,3	-	-	1800,0	-	539
		4	-	-	1800,0	-	-	-	1800,0	-	679
	50	2	419	0,0	1800,0	26,5	403	0,0	1800,0	26,3	379
		3	681	5,6	1800,0	54,8	613	354,1	1800,0	54,9	514
		4	730	1447,4	1800,0	61,0	-	-	1800,0	-	644
	60	2	431	1,0	1800,0	28,9	419	1,3	1800,0	29,9	374
		3	562	1,8	1800,0	45,1	596	2,0	1800,0	51,4	484
		4	780	0,0	1800,0	61,7	736	346,7	1800,0	62,1	608
	INF	2	284	0,0	3,7	0,0	284	0,0	4,2	0,0	284
		3	284	0,0	5,1	0,0	284	0,0	6,2	0,0	284
		4	284	0,0	6,9	0,0	284	0,0	5,5	0,0	284
ulysses16	12	2	125	0,0	1800,0	62,0	130	1,9	1800,0	64,2	119
		3	181	0,0	1800,0	75,4	237	3,4	1800,0	81,2	171
		4	260	7,2	1800,0	82,1	249	3,1	1800,0	82,6	224
	14	2	123	1,8	1800,0	62,5	133	3,9	1800,0	64,6	118
		3	173	2,8	1800,0	73,9	183	76,0	1800,0	76,0	168
		4	240	3,4	1800,0	81,4	256	3,3	1800,0	83,0	218
	16	2	119	1,8	1800,0	60,6	122	0,0	1800,0	59,0	116
		3	172	2,9	1800,0	74,1	174	0,0	1800,0	74,8	165
		4	226	4,3	1800,0	80,1	258	3,1	1800,0	82,6	215
	INF	2	74	0,0	1800,0	31,7	74	1,4	1800,0	31,8	74
		3	74	0,0	1800,0	35,6	74	0,0	1800,0	33,8	74
		4	74	0,0	1800,0	36,2	74	0,0	1800,0	41,1	74

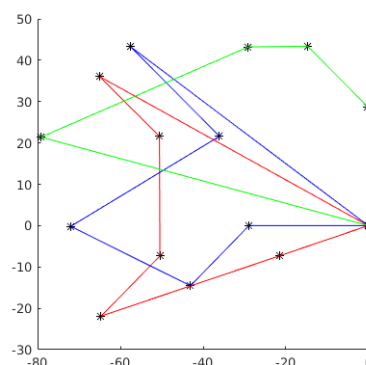
Conforme referido anteriormente, a solução de uma instância com D reduzido também é factível para uma instância com mesma configuração e um D menos restritivo. Esse comportamento é observado nos resultados da meta-heurística, uma vez que quando o valor de D aumenta, os valores de função objetivo das soluções obtidas diminuem. Mas isso não é sempre verificado quando se observa as colunas com os valores de função objetivo encontrados pelos modelos. Considerando o modelo mCA⁺, soluções de pior qualidade para instâncias com configuração igual e D maior são encontradas em 4 casos: para a instância *burma14* com dois veículos, quando D passa de 6 para 7, na instância *P1* com três veículos, quando D passa de 40 para 50, e nas instâncias derivadas de *P1* com dois e quatro veículos, quando D varia de 50 para 60. Considerando o modelo mCA, tal situação ocorre oito vezes, que não serão referidas aqui mas podem ser encontradas na Tabela 1. Esse comportamento é devido ao fato que quanto maior for o D mais restrições de arcos de cobertura são incorporadas ao modelo, dificultando a resolução por parte do pacote de otimização.

Para avaliar a conformidade do modelo algumas soluções encontradas foram representadas graficamente, de modo a possibilitar a observação do comportamento de cobertura dos veículos. A Figura 3 apresenta duas soluções para a instância *P1* com o parâmetro D definido com valor 40.

Essa instância é interessante pois apresenta pontos dispostos de forma que são praticamente colineares.



(a) Instância com 2 veículos



(b) Instância com 3 veículos

Figura 3: Soluções para instância *PI* com $D = 40$.

Nessas imagens, é possível observar comportamentos que não são comuns nem desejáveis em problemas de roteamento tradicionais. Por exemplo, na Figura 3(a), a partida da garagem (em direção ao canto inferior esquerdo) ocorre com os veículos andando praticamente juntos (não estão propriamente juntos porque os pontos não são colineares), e o veículo representado pela rota vermelha passando junto a um vértice (o primeiro) que é visitado pelo veículo representado pela rota azul. Logo em seguida a situação se inverte, com o veículo da rota azul passando praticamente sobre o primeiro vértice visitado pelo veículo da rota vermelha. Situação semelhante ocorre na Figura 3(b), com o veículo da rota vermelha passando junto ao segundo vértice visitado pelo veículo da rota azul.

De volta à Figura 3(a), é interessante observar ainda a virada à direita feita pelo veículo da rota vermelha logo após a visita aos seu primeiro vértice, partindo em direção ao segundo. Embora incoerente do ponto de vista da redução do custo de roteamento, este trecho resulta no atraso necessário para que o veículo da rota azul visite o seu vértice mais extremo na parte inferior, e ambos partam sincronizados para a visita aos vértices da parte superior da imagem.

Este comportamento fica ainda mais evidente quando observadas as soluções da Figura 4. Para as três configurações de veículos, é possível observar que as visitas aos vértices colocados entre as coordenadas 10 e 15 no eixo vertical ocorrem em trechos de rotas marcados por voltas e cruzamentos de arcos. Isso se justifica pela necessidade dos veículos responsáveis por essas visitas aguardarem os veículos que se dirigem aos vértices na parte mais alta da imagem, de modo a retornarem para a garagem com a cobertura mútua.

5. Conclusões

Neste trabalho foi apresentado um modelo de programação linear inteira mista para o Problema de Múltiplos Caixeiros Viajantes com Cobertura de Apoio. A formulação se mostrou coerente com a definição do problema, pois é possível observar o sincronismo esperado entre as rotas nas soluções geradas, com o qual fica estabelecido um comportamento de cobertura mútua entre os veículos.

Foi apresentado também um pré-processamento aplicado às instâncias para a determinação de arcos ou segmentos de arcos que proporcionam a cobertura espacial de cada vértice. Esse pré-processamento pode ser útil no desenvolvimento de novos métodos de resolução para esse problema ou outros problemas com semelhante característica de interdependência espacial.

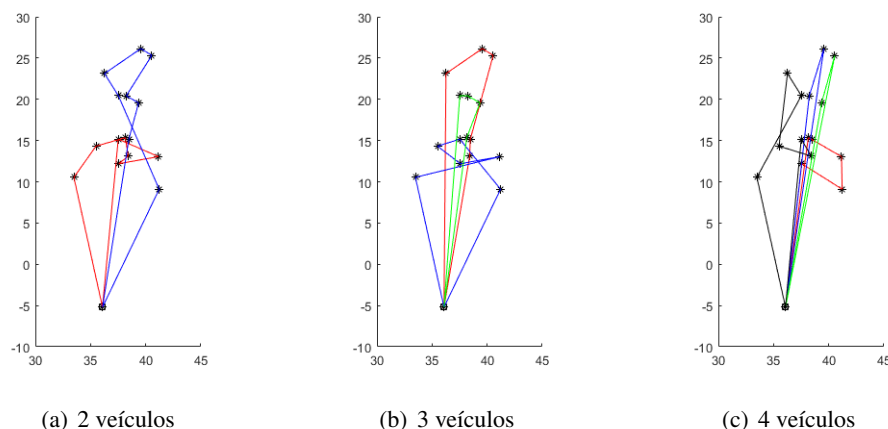


Figura 4: Soluções para instância *ulysses16* com $D = 14$.

Os resultados computacionais apontam que a aplicação modelo proposto está restrita a instâncias de tamanho reduzido. O uso de uma desigualdade válida melhora moderadamente o desempenho do pacote de otimização.

A partir da definição formal e formulação matemática do PMCV-CA é possível considerar como trabalhos futuros o desenvolvimento de métodos exatos especializados, bem como o estudo de variações do problema. Uma variação possível corresponde ao caso em que cada veículo necessita da cobertura de apoio de um número menor que $m - 1$ de veículos, o que favorece a formação de equipes distintas que se auxiliam mutuamente.

Referências

- Akgün, V., Erkut, E., and Batta, R. (2000). On finding dissimilar paths. *European Journal of Operational Research*, 121(2):232 – 246.
- Amaya, A., Langevin, A., and Trépanier, M. (2007). The capacitated arc routing problem with refill points. *Operations Research Letters*, 35(1):45 – 53.
- Amaya, C., Langevin, A., and Trépanier, M. (2010). A heuristic method for the capacitated arc routing problem with refill points and multiple loads. *JORS*, 61(7):1095–1103.
- Del Pia, A. and Filippi, C. (2006). A variable neighborhood descent algorithm for a real waste collection problem with mobile depots. *International Transactions in Operational Research*, 13 (2):125–141.
- Dell’Olmo, P., Gentili, M., and Scozzari, A. (2005). On finding dissimilar pareto-optimal paths. *European Journal of Operational Research*, 162(1):70 – 82.
- Dhein, G., de Araújo, O. C. B., and Cardoso, G., Jr. (2018). Genetic local search algorithm for a new bi-objective arc routing problem with profit collection and dispersion of vehicles. *Expert Systems with Applications*, 92:276 – 288.
- Dhein, G., Kummer Neto, A. F., and de Araújo, O. C. B. (aceito para publicação). The multiple traveling salesman problem with backup coverage. *Electronic Notes in Discrete Mathematics*. 5th International Conference on Variable Neighborhood Search - 2017.
- Dohn, A., Kolind, E., and Clausen, J. (2009). The manpower allocation problem with time windows and job-teaming constraints: A branch-and-price approach. *Computers & Operations Research*, 36(4):1145 – 1157.

- Drex1, M. (2012b). Synchronization in vehicle routing - A survey of vrps with multiple synchronization constraints. *Transportation Science*, 46(3):297–316.
- Drex1, M. (2013). Applications of the vehicle routing problem with trailers and transshipments. *European Journal of Operational Research*, 227(2):275 – 283.
- Fikar, C. and Hirsch, P. (2015). A matheuristic for routing real-world home service transport systems facilitating walking. *Journal of Cleaner Production*, 105:300 – 310.
- Liu, L., Mu, H., and Yang, J. (2016). Simulated annealing based grasp for pareto-optimal dissimilar paths problem. *Soft Computing*, 21:1 – 17.
- Lombard, K. and Church, R. (1993). The gateway shortest path problem: generation of alternative routes for a corridor location problem. *Geographical Systems*, 1:25–45.
- Mankowska, D. S., Meisel, F., and Bierwirth, C. (2014). The home health care routing and scheduling problem with interdependent services. *Health Care Management Science*, 17(1):15–30.
- Martí, R., Velarde, J. L. G., and Duarte, A. (2009). Heuristics for the bi-objective path dissimilarity problem. *Computers & Operations Research*, 36(11):2905 – 2912.
- Mitrović-Minić, S. and Laporte, G. (2006). The pickup and delivery problem with time windows and transshipment. *INFOR: Information Systems and Operational Research*, 44(3):217–227.
- Ngueveu, S. U., Prins, C., and Calvo, R. W. (2010). A hybrid tabu search for the m-peripatetic vehicle routing problem. In Maniezzo, V., Stützle, T., and Voß, S., editors, *Matheuristics: Hybridizing Metaheuristics and Mathematical Programming*, p. 253–266. Springer US, Boston, MA.
- Qu, Y. and Bard, J. F. (2012). A grasp with adaptive large neighborhood search for pickup and delivery problems with transshipment. *Computers & Operations Research*, 39(10):2439 – 2456.
- Reinelt, G. (1991). Tsp1ib-a traveling salesman problem library. *ORSA Journal on Computing*, 3(4):376–384.
- Rosa, B. D., Improta, G., Ghiani, G., and Musmanno, R. (2002). The arc routing and scheduling problem with transshipment. *Transportation Science*, 36(3):301–313.
- Salazar-Aguilar, M. A., Langevin, A., and Laporte, G. (2012). Synchronized arc routing for snow plowing operations. *Computers & Operations Research*, 39(7):1432 – 1440.
- Salazar-Aguilar, M. A., Langevin, A., and Laporte, G. (2013). The synchronized arc and node routing problem: Application to road marking. *Computers & Operations Research*, 40(7):1708 – 1715.
- Talarico, L., Sörensen, K., and Springael, J. (2015). The k-dissimilar vehicle routing problem. *European Journal of Operational Research*, 244(1):129 – 140.
- Wex, F., Schryen, G., and Neumann, D. (2013). Assignments of collaborative rescue units during emergency response. *IJISCRAM*, 5(4):63–80.