INTERVALO DE TOLERÂNCIA PARA A VARIÂNCIA AMOSTRAL

Martin Guillermo Cornejo Sarmiento
martin.cornejo8@gmail.com

Eugenio Kahn Epprecht
eke@puc-rio.br
Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, PUC - Rio
Departamento de Engenharia Industrial
Rua Marquês de São Vicente, 225, Gávea, CEP 22451-900, Rio de Janeiro, RJ, Brasil

RESUMO

Intervalos de tolerância são largamente utilizados na indústria e em diferentes áreas cientificas. Limites de tolerância para uma medida de uma característica especifica da qualidade de um produto (ou processo) são usados na avaliação da conformidade e aceitação de produtos (ou processos). Quando o interesse se centra na precisão (ou uniformidade) desta medida, o intervalo de tolerância para a variância da amostra é útil nas aplicações práticas. O uso dos limites unilaterais ou bilaterais depende do contexto da aplicação, do interesse da avaliação e da natureza da característica de qualidade. Desta forma, neste artigo, limites (superiores) unilaterais e bilaterais de tolerância para a população (ou distribuição) das variâncias de amostras provenientes de dados distribuídos normalmente são examinados. Tabelas dos fatores de tolerância, necessários para calcular os limites de tolerância, são fornecidas para várias configurações de intervalos. Um exemplo de construção e implementação dos intervalos de tolerância é apresentado.

PALAVRAS CHAVE. Limites unilaterais e bilaterais de tolerância, Variância amostral, Distribuição normal.

Tópicos: EST – Estatística, MP - Modelos Probabilísticos.

ABSTRACT

Tolerance intervals are broadly utilized in the industry and in several fields of sciences. Tolerance limits for a specific quality characteristic of a product (or a process) are used in conformity assessment and acceptance of products (or processes). When the precision (or uniformity) of the values of the measured quality characteristic is the main users' concern, the tolerance interval for the sample variances can be useful in practical applications. The use of either one-sided or two-sided limits depends on the context of the application, the interest of the study and the type of the quality characteristic. With this in mind, in this paper, one-sided (upper) and two-sided tolerance limits for the sample variances, which arises from normally distributed data, are examined. Tables of tolerance factors used to obtain the tolerance intervals (for different tuning) are provided. An illustration of the construction and implementation of tolerance intervals is presented.

KEYWORDS. One-sided and two-sided tolerance limits. Sample variance. Normal distribution.

Paper topics: EST– Statistic, MP – Probabilistic Model.

1. Introdução

Métodos da estatística inferencial desempenham um papel-chave na tomada de decisões. Esses métodos, tais como estimação pontual, intervalos estatísticos e teste de hipóteses, usam a informação que procede de dados limitados de uma amostra aleatória a fim de tirar conclusões acerca da associada população (distribuição) ou processo de interesse. Por exemplo, a estimação pontual pode ser usada para obter a estimativa de um parâmetro (um valor representativo de localização ou dispersão) de uma determinada população. No entanto, essa estimação não fornece informação sobre a precisão do valor estimado (ou seja, quão boa é a estimativa obtida). O conhecimento da medida de incerteza relacionada a essa estimativa, que é um assunto de preocupação para a tomada de decisões, pode ser abordado por Intervalos Estatísticos. Esta incerteza pode ser quantificada através do comprimento dos intervalos que são construídos em torno da estimativa pontual e considerando o efeito da estimação dos parâmetros e o tamanho da amostra para estimar esses parâmetros ([Montgomery 2000]).

A maioria da bibliografia para estatística considera três tipos principais de Intervalos Estatísticos, que são construídos a partir de dados de uma amostra aleatória específica ([Hahn 1970], [Vardeman 1992], ([Montgomery 2000], [Meeker et al. 2017]). Um intervalo de confiança representa uma estimativa de intervalo que inclui um parâmetro desconhecido de uma população (ou processo) analisada, como a média, desvio padrão ou percentis, com um nível de confiança especificado. Um intervalo de previsão contém os limites de uma ou mais observações futuras da população de interesse com um certo grau de confiança. O intervalo estatístico de tolerância, o terceiro tipo de intervalo que é examinado neste trabalho, fornece limites que contêm pelo menos uma proporção especificada de uma população analisada com um específico nível de confiança. Ao contrário dos intervalos de previsão (onde analisa-se um pequeno número de observações futuras), os intervalos de tolerância abrangem valores que representam uma grande proporção das observações da correspondente população, geralmente, com um alto nível de confiança.

Uma escolha adequada de um intervalo estatístico para uma aplicação depende do problema específico. Por exemplo, [Meeker et al. 2017] fornecem uma breve orientação sobre o assunto. Eles recomendaram a escolha baseada no objetivo geral do intervalo construído (descrição ou previsão) e na característica de interesse (localização, dispersão, delimitação de populações e probabilidade de um evento). Na prática, às vezes há um uso incorreto de intervalos estatísticos, que pode acontecer, por exemplo, primeiro, por causa da familiaridade dos usuários com os intervalos de confiança ou mesmo com os intervalos de previsão; em segundo lugar, a maioria dos livros básicos de estatística preocupa-se basicamente com intervalos de confiança e; finalmente, pela impressão dos usuários de que os cálculos dos limites de tolerância são muito mais complicados do que aqueles para intervalos de confiança e previsão. Assim, essas questões podem levar a que os intervalos de tolerância não sejam bem utilizados. Apesar disso, os intervalos estatísticos de tolerância são uma ferramenta poderosa utilizados, geralmente, na produção em massa, em aplicações práticas de engenharia, indústria, manufatura e ciências (como Biologia, Medicina, Farmácia e Bioquímica, entre outras) para avaliar a qualidade de um produto ou processo. Muitas vezes, a avaliação da qualidade de um produto ou processo consiste em verificar se o intervalo de tolerância obtido para uma característica de qualidade está contido dentro de seus limites de especificação (ver, por exemplo, [Lai et al. 2012] e [Dong et al. 2015a]). Além disso, em algumas aplicações, quando os limites de especificações não são definidos porque não há suficiente conhecimento prévio do processo, os intervalos de tolerância são usados no estabelecimento ou revisão dos limites de especificação do produto ou processo (ver, por exemplo, [Dong et al. 2015b]).

[Krishnamoorthy e Mathew 2009] é um dos trabalhos mais abrangentes sobre a teoria e aplicações de intervalos de tolerância, veja também [Guttman 1970], [Vangel 2008] e [Meeker et al. 2017]. [Wilks 1941,1942] foram os primeiros estudos dos intervalos de tolerância, considerando a suposição de normalidade. Desde então, diferentes pesquisadores estudaram este tópico sob diferentes abordagens e suposições. [Patel 1986] e [Jílek e Ackermann 1989] apresentam revisões bibliográficas sobre intervalos de tolerância. A teoria dos intervalos de tolerância para populações

não normais também é estudada, por exemplo, [Shirke et al. 2005] e [Krishnamoorthy et al. 2008] para distribuições contínuas e, [Cai e Wang 2009] e [Krishnamoorthy et al. 2011] para distribuições discretas. [Di Bucchianico et al. 2001], [Young e Mathew 2014], entre outros, estudaram intervalos de tolerância não paramétricos. Intervalos de tolerância bayesiana são abordados, por exemplo, por [Murphy 1948] e [Hamada et al. 2004].

Na construção e aplicação de intervalos de tolerância, surge a questão se limites unilaterais ou bilaterais devem ser usados. Como no caso de um intervalo de confiança, a resposta depende do contexto da aplicação, o interesse da avaliação e a natureza da característica de qualidade. Por exemplo, em uma avaliação dos níveis de poluição do ar num local de trabalho ou uma cidade, os pesquisadores devem avaliar se esses níveis são baixos e não ultrapassam um determinado nível máximo (segundo exigências da legislação ambiental ou trabalhista), portanto, um limite superior de um intervalo unilateral de tolerância pode ser construído para garantir a exigência mencionada. Intervalos de tolerância para a população das variâncias amostrais (ou, equivalentemente, para a distribuição amostral da variância) são úteis quando o principal interesse é a precisão dos valores da característica da qualidade, de modo que obter um entendimento mais profundo da variabilidade/confiabilidade do produto/processo seja favorável no desenvolvimento e melhoria do processo. Para este fim, [Tietjen e Johnson 1979] propuseram e examinaram limites superiores de intervalos unilaterais de tolerância para variâncias amostrais dado que, na opinião deles, em aplicações práticas, o controle de aumentos na variância é a principal preocupação e, deste modo, os limites inferiores são considerados irrelevantes e podem ser dispensados. Por outro lado, segundo [Meeker et al. 2017], mesmo que em muitas aplicações o interesse centra-se em um limite inferior ou em um limite superior, a construção de intervalos estatísticos com limites bilaterais é mais conveniente. Poderíamos dizer que embora o limite superior de tolerância, tratado por [Tietjen e Johnson 1979], seja útil para entender quão grande seria a variabilidade do processo (deterioração do processo), como na aplicação que eles apresentaram, em geral, o fato de usar unicamente o limite superior pode ignorar as informações que poderiam ser fornecidas pelo limite inferior, que indicaria quão pequena seria a variabilidade do processo (melhoria do processo). Esta última informação pode ser de grande relevância já que reduzir a variabilidade é um dos objetivos mais importantes nos estudos de qualidade/confiabilidade. [Fraser 2011] também recomendou o uso de intervalos estatísticos bilaterais, argumentando que é desejável equilibrar as probabilidades nas duas caudas. Portanto, a escolha do tipo de intervalo, unilateral ou bilateral, depende do objetivo e ambos têm seu lugar na prática.

Tendo em vista esta realidade, no presente trabalho, limites unilaterais (superiores) e bilaterais de tolerância para a população de variâncias amostrais são examinadas. Assim, determinamos o intervalo (aleatório) que contém pelo menos uma proporção especificada da população das variâncias amostrais (ou distribuição amostral da variância) com um determinado nível de confiança. Estas variâncias amostrais são assumidas como provenientes de amostras aleatórias independentes de uma distribuição normal, cujos parâmetros são desconhecidos e devem ser estimados. Tabelas dos fatores de tolerância, necessários para calcular os limites de tolerância, são fornecidas considerando diferentes configurações ou casos de intervalos. Embora [Tietjen e Johnson 1979] apresentam uma formula para o cálculo dos fatores de tolerância dos intervalos unilaterais superiores de tolerância, considerando limites de probabilidade, neste trabalho serão considerados limites (unilaterais e bilaterais) de tolerância da forma k-sigma (ou seja, $\hat{\mu}_{S^2} \pm k\hat{\sigma}_{S^2}$). De acordo com nosso conhecimento, o caso dos intervalos bilaterais de tolerância não tem sido estudado na literatura existente, nem tabelas dos fatores de tolerância têm sido fornecidas.

O restante deste artigo está organizado da seguinte forma: a Seção 2 apresenta o método para determinar os fatores e limites (unilateral superior e bilateral) de tolerância. A Seção 3 fornece tabelas dos fatores de tolerância para limites unilaterais (superiores) e bilaterais de tolerância. Um exemplo da construção e implementação de intervalos de tolerância para variâncias amostrais é apresentado na Seção 4. Considerações finais e conclusões desse trabalho são apresentadas na Seção 5.

2. Intervalos de tolerância para as variâncias amostrais

A variável aleatória X representa uma característica de qualidade de interesse de um produto (ou processo). X é considerada normalmente distribuída com média μ e variância σ^2 ($X \sim N(\mu,\ \sigma^2)$). Seja S^2 a variância de uma amostra aleatória de observações provenientes da distribuição de X e seja $\{S_1^2, S_2^2, S_3^2, \dots\}$ a população das variâncias amostrais. Cada S_i^2 provém de uma amostra aleatória de tamanho n (n observações $\{X_{i1}, X_{i2}, \dots, X_{in}\}$), onde as observações X_{ij} ($X_{ij} \sim N(\mu, \sigma^2),\ i = 1, 2, 3, \dots, j = 1, 2, \dots, n$) são independentes dentro e entre as amostras. A média e a variância da i-ésima amostra são $\bar{X}_i = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} X_{ij}$ and $S_i^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{j=1}^{n}\left(X_{ij} - \bar{X}_i\right)^2$, respectivamente. Neste trabalho, nós consideramos limites k-sigma de tolerância da forma $\hat{\mu}_{S^2} \pm k\hat{\sigma}_{S^2}$, onde $\hat{\mu}_{S^2}$ e $\hat{\sigma}_{S^2}$ são os valores estimados da média (ou valor esperado) e do desvio-padrão da estatística S^2, k ($k > 0$) é a distância dos limites de tolerância a partir da estimativa da média, expressa em unidades de desvio-padrão.

2.1. Intervalos bilaterais de tolerância para as variâncias amostrais

O intervalo $(1-\alpha, \gamma)$ bilateral (inferior e superior) de tolerância k-sigma ($\hat{S}^2_{L^*_{two}}, \hat{S}^2_{U^*_{two}}$) para S^2 contém pelo menos $(1-\alpha)100\%$ da população das variâncias amostrais (ou, equivalentemente, da distribuição S^2) com um específico nível de confiança $100\gamma\%$. Este intervalo é definido na Equação (1):

$$P_{\hat{\sigma}^2}\left(P_{S^2}\left(\hat{S}^2_{L^*_{two}} \le S^2 \le \hat{S}^2_{U^*_{two}} \mid \hat{\sigma}^2\right) \ge 1-\alpha\right) = \gamma \tag{1}$$

onde $\hat{S}^2_{L^*_{two}}$ e $\hat{S}^2_{U^*_{two}}$ são os limites inferior e superior do intervalo bilateral de tolerância, a probabilidade $P_{S^2}\left(\hat{S}^2_{L^*_{two}} \le S^2 \le \hat{S}^2_{U^*_{two}} \mid \hat{\sigma}^2\right)$ é a cobertura real do intervalo bilateral de tolerância, o valor $1-\alpha$ é a proporção nominal do intervalo ($0 < 1-\alpha < 1$) e γ é o nível de confiança especificado ($0 < \gamma < 1$). Dado que $\hat{S}^2_{L^*_{two}}$ e $\hat{S}^2_{U^*_{two}}$ são definidos como limites k-sigma, o intervalo pode ser expresso da seguinte forma:

$$P_{\hat{\sigma}^2}(P_{S^2}(\hat{\mu}_{S^2} - k\hat{\sigma}_{S^2} \le S^2 \le \hat{\mu}_{S^2} + k\hat{\sigma}_{S^2} \mid \hat{\sigma}^2) \ge 1-\alpha) = \gamma \tag{2}$$

Podemos notar que como o valor da variância do processo (variância de X) σ^2 não é conhecido, é necessário estimar σ^2 para obter os limites de tolerância que resultam em um intervalo de tolerância aleatório. Já que S^2 é um valor não negativo, o valor de $\hat{S}^2_{L^*_{two}}$ deve ser não negativo ($\hat{\mu}_{S^2} - k\hat{\sigma}_{S^2} \ge 0$). É bem sabido que os estimadores da média (valor esperado) e do desvio padrão da variância da amostra (de n observações) S^2 são dados pela Equação (3) (ver [Costa et al. 2005]):

$$\hat{E}(S^2) = \hat{\mu}_{S^2} = \hat{\sigma}^2 \quad \text{and} \quad \widehat{SD}(S^2) = \hat{\sigma}_{S^2} = \hat{\sigma}^2\sqrt{\frac{2}{n-1}} \tag{3}$$

Usualmente, a estimação de σ^2 (cálculo do valor $\hat{\sigma}^2$) é feita usando dados de referência do mesmo processo estudado. Como no contexto do controle estatístico de processos (CEP), estes dados de referência devem ser coletados desde um processo em estado de controle estatístico, especificamente, desde o chamado processo de Fase I (ver, por exemplo, [Chakraborti et al. 2009] e [Jones-Farmer et al. 2014]). Neste trabalho, os dados de referência são amostras múltiplas que consistem em m ($m > 1$) amostras aleatórias independentes, cada uma de tamanho n ($n > 1$, o mesmo tamanho da amostra (n) definido na população de variâncias amostrais): $X_{ij} \sim N(\mu, \sigma^2)$, $i = \{1, 2, \dots, m\}$ and $j = \{1, 2, \dots, n\}$. O estimador (não tendencioso) combinado S_p^2 é considerado o estimador da variância σ^2 (isto é, $\hat{\sigma}^2 = S_p^2$):

$$S_p^2 = \hat{\sigma}^2 = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} S_i^2 = \frac{1}{m(n-1)}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\left(X_{ij} - \bar{X}_i\right)^2 \quad (4)$$

Desta forma, usando as Equações (3) e (4), o intervalo $(1-\alpha, \gamma)$ bilateral de tolerância k-sigma apresentado na Equação (2) pode ser expresso da seguinte forma (Equação (5))

$$P_{S_p^2}\left(P_{S^2}\left(L_{two}^* S_p^2 \leq S^2 \leq U_{two}^* S_p^2 \mid S_p^2\right) \geq 1-\alpha\right) = \gamma \quad (5)$$

onde L_{two}^* e U_{two}^* são os fatores de tolerância (inferior e superior, respectivamente) do intervalo $(1-\alpha, \gamma)$ bilateral de tolerância k-sigma, tal que

$$L_{two}^* = max\left\{0,\ 1 - k\sqrt{\frac{2}{n-1}}\right\} \quad \text{and} \quad U_{two}^* = 1 + k\sqrt{\frac{2}{n-1}} \quad (6)$$

Assim, os limites (inferior e superior) de tolerância do intervalo $(1-\alpha, \gamma)$ bilateral de tolerância k-sigma $(\hat{S}^2_{L_{two}^*}, \hat{S}^2_{U_{two}^*})$ são dados por

$$\hat{S}^2_{L_{two}^*} = L_{two}^* S_p^2 \quad \text{and} \quad \hat{S}^2_{U_{two}^*} = U_{two}^* S_p^2 \quad (7)$$

Logo, é necessário definir o método para determinar o valor de k. Substituindo os limites (Equação (7)) no intervalo definido pela Equação (5), tem-se

$$P_Y\left(P_W\left(\frac{Y}{m} L_{two}^* \leq W \leq \frac{Y}{m} U_{two}^* \mid Y\right) \geq 1-\alpha\right) = \gamma \quad (8)$$

onde $W = (n-1)S^2/\sigma^2$ e $Y = m(n-1)\,S_p^2/\sigma^2$, tal que W e Y seguem distribuições qui-quadrado com $(n-1)$ e $m(n-1)$ graus de liberdade (gl), respectivamente. W e Y são variáveis aleatórias independentes. Usando a Equação (6), a expressão da Equação (8) pode ser reescrita como

$$\begin{cases} P_Y\left(F_{\chi^2_{n-1}}\left(\frac{Y}{m}\left[1 + k\sqrt{\frac{2}{n-1}}\right] \mid Y\right) - F_{\chi^2_{n-1}}\left(\frac{Y}{m}\left[1 - k\sqrt{\frac{2}{n-1}}\right] \mid Y\right) \geq 1-\alpha\right) = \gamma,\ se\ 1 - k\sqrt{\frac{2}{n-1}} > 0 \\ P_Y\left(F_{\chi^2_{n-1}}\left(\frac{Y}{m}\left[1 + k\sqrt{\frac{2}{n-1}}\right] \mid Y\right) \geq 1-\alpha\right) = \gamma, \quad se\ 1 - k\sqrt{\frac{2}{n-1}} \leq 0 \end{cases} \quad (9)$$

onde $F_{\chi^2_{n-1}}$ denota a função de distribuição acumulada (FDA) da variável qui-quadrada com $n-1$ gl. Seja G a cobertura real do intervalo bilateral de tolerância. A função G foi definida na Equação (1) como $P_{S^2}\left(\hat{S}^2_{L_{two}^*} \leq S^2 \leq \hat{S}^2_{U_{two}^*} \mid \hat{\sigma}^2\right)$ e pode ser expressa, baseada na Equação (9), como uma função da variável aleatória Y, tal que

$$G(Y; k, m, n) = \begin{cases} F_{\chi^2_{n-1}}\left(\frac{Y}{m}\left(1 + k\sqrt{\frac{2}{n-1}}\right) \mid Y\right) - F_{\chi^2_{n-1}}\left(\frac{Y}{m}\left(1 - k\sqrt{\frac{2}{n-1}}\right) \mid Y\right),\ se\ k < \sqrt{\frac{n-1}{2}} \\ F_{\chi^2_{n-1}}\left(\frac{Y}{m}\left(1 + k\sqrt{\frac{2}{n-1}}\right) \mid Y\right),\ se\ k \geq \sqrt{\frac{n-1}{2}} \end{cases} \quad (10)$$

Por meio da análise da primeira e segunda derivada da função $G(Y; k, m, n)$ quando $k < \sqrt{\frac{n-1}{2}}$ (Equação (10)), determinou-se que G, expressa como uma função de Y, é côncava, crescente no intervalo $(0,\ y_0)$ e decrescente no intervalo $(y_0,\ \infty)$, onde $y_0 = m(n-1)\ln(U_{two}^*/L_{two}^*)/(U_{two}^* - L_{two}^*)$, L_{two}^* e U_{two}^* são definidos na Equação (6). Esta análise permite obter a probabilidades de sobrevivência (*survival probability*) de G, isto é, o complemento da FDA de G, através das seguintes expressões da Equação (11):

$$P_Y(G(Y;k,m,n) \geq 1-\alpha) =$$
$$\begin{cases} F_{\chi^2_{m(n-1)}}(y_2) - F_{\chi^2_{m(n-1)}}(y_1), onde\ G(y_i;k,m,n) = 1-\alpha, i = 1,2\ e\ y_1 < y_2, se\ k < \sqrt{\frac{n-1}{2}} \\ 1 - F_{\chi^2_{m(n-1)}}\left(\frac{m\chi^2_{n-1,1-\alpha}}{1+k\sqrt{\frac{2}{n-1}}}\right), \quad se\ k \geq \sqrt{\frac{n-1}{2}} \end{cases} \tag{11}$$

Assim, dado os valores específicos de m, n, $1-\alpha$ and γ, o valor requerido de k é encontrado resolvendo $P_Y(G(Y;k,m,n) \geq 1-\alpha) = \gamma$. Portanto, tem-se

$$k(m,n,1-\alpha,\gamma) =$$
$$\begin{cases} (i)\ Se\ \frac{m\chi^2_{n-1,1-\alpha}}{2\chi^2_{m(n-1),1-\gamma}} \geq 1,\ k = \sqrt{\frac{n-1}{2}}\left(\frac{m\chi^2_{n-1,1-\alpha}}{\chi^2_{m(n-1),1-\gamma}} - 1\right) \\ (ii)\ Se\ \frac{m\chi^2_{n-1,1-\alpha}}{2\chi^2_{m(n-1),1-\gamma}} < 1,\ k\ pode\ ser\ obtido\ através\ de\ um\ método \\ numérico\ tal\ que\ as\ seguintes\ duas\ equações\ devem\ ser\ satisfeitas \\ F_{\chi^2_{m(n-1)}}(y_2) - F_{\chi^2_{m(n-1)}}(y_1) - \gamma = 0\ e\ G(y_i;k,m,n) = 1-\alpha, \text{onde } i = 1,2 \text{ e } y_1 < y_2 \end{cases} \tag{12}$$

2.2. Intervalos unilaterais (superior) de tolerância para as variâncias amostrais

Semelhante ao caso do intervalo bilateral já examinados acima, o intervalo $(1-\alpha, \gamma)$ unilateral superior de tolerância k-sigma $(0, \hat{S}^2_{U^*_{one}})$ para S^2 é definido na seguinte expressão

$$P_{\hat{\sigma}^2}\left(P_{S^2}\left(S^2 \leq \hat{S}^2_{U^*_{one}} \mid \hat{\sigma}^2\right) \geq 1-\alpha\right) = \gamma \tag{13}$$

onde $\hat{S}^2_{U^*_{one}}$ é o limite superior k-sigma do intervalo unilateral de tolerância, assim, considerando o estimador (não tendencioso) combinado S^2_p, o intervalo será

$$P_{\hat{\sigma}^2}(P_{S^2}(S^2 \leq \hat{\mu}_{S^2} + k\hat{\sigma}_{S^2} \mid \hat{\sigma}^2) \geq 1-\alpha) = P_{S^2_p}\left(P_{S^2}\left(S^2 \leq S^2_p U^*_{one} \mid S^2_p\right) \geq 1-\alpha\right) = \gamma \tag{14}$$

Lembrando que $W = (n-1)S^2/\sigma^2$ e $Y = m(n-1)\,S^2_p/\sigma^2$, tal que W e Y seguem distribuições qui-quadrado com $(n-1)$ e $m(n-1)$ gl. A Equação (14) pode ser reescrita da seguinte forma:

$$P_Y\left(P_{S^2}\left(W \leq Y\frac{U^*_{one}}{m} \mid Y\right) \geq 1-\alpha\right) = P\left(Y \geq m\frac{\chi^2_{n-1,1-\alpha}}{U^*_{one}}\right) = \gamma \tag{15}$$

Portanto, resolvendo a Equação (15), o valor de k, o fator superior de tolerância U^*_{one} e o limite superior de tolerância $\hat{S}^2_{U^*_{one}}$ do intervalo $(1-\alpha, \gamma)$ unilateral superior de tolerância k-sigma $(0, \hat{S}^2_{U^*_{one}})$ para S^2 podem ser determinados segundo as Equações (16), (17) e (18), respectivamente.

$$k = \sqrt{\frac{n-1}{2}}\left(m\frac{\chi^2_{n-1,1-\alpha}}{\chi^2_{m(n-1),1-\gamma}} - 1\right) \tag{16}$$

$$U^*_{one} = 1 + k\sqrt{\frac{2}{n-1}} = m\frac{\chi^2_{n-1,1-\alpha}}{\chi^2_{m(n-1),1-\gamma}} \tag{17}$$

$$\hat{S}^2_{U^*_{one}} = U^*_{one}S^2_p \tag{18}$$

3. Tabelas de fatores de tolerância (inferior e superior) de intervalos unilaterais e bilaterais de tolerância

A Tabela 1 fornece os valores de k e os correspondentes valores dos fatores (inferior e superior) de tolerância (L^*_{two} e U^*_{two}, respectivamente) do intervalo $(1-\alpha,\ \gamma)$ bilateral de tolerância k-sigma, considerando $1-\alpha = 0.90, 0.95, 0.99$, $\gamma = 0.95$ e diferentes quantidades de dados referencias ($m = 10, 25, 50, 100$ e $n = 5, 10, 15, 20, 25$) que são utilizados para estimar a variância do processo σ^2 (isto é, $\hat{\sigma}^2 = S_p^2$). De modo similar, a Tabela 2 apresenta o valor de k e os fatores superiores de tolerância (U^*_{one}) do intervalo $(1-\alpha, \gamma)$ unilateral de tolerância k-sigma para S^2.

Tabela 1. Fatores (inferior e superior) de tolerância (L^*_{two} e U^*_{two}, respectivamente) do intervalo $(1-\alpha, \gamma)$ bilateral de tolerância k-sigma para S^2 de n observações considerando m amostras de tamanho n para estimar σ^2 usando S_p^2

			$1-\alpha$								
			0.90			0.95			0.99		
γ	m	n	k	L^*_{two}	U^*_{two}	k	L^*_{two}	U^*_{two}	k	L^*_{two}	U^*_{two}
0.95	10	5	2.7359	0.0000	2.9346	3.6473	0.0000	3.5790	5.6686	0.0000	5.0083
		10	2.3848	0.0000	2.1242	3.0707	0.0000	2.4476	4.5275	0.0000	3.1343
		20	2.1901	0.2894	1.7106	2.7570	0.1055	1.8945	3.9284	0.0000	2.2745
		25	2.1478	0.3800	1.6200	2.6854	0.2248	1.7752	3.7939	0.0000	2.0952
	25	5	2.1152	0.0000	2.4957	2.8902	0.0000	3.0437	4.6092	0.0000	4.2592
		10	1.9504	0.0806	1.9194	2.5695	0.0000	2.2113	3.8856	0.0000	2.8317
		20	1.8785	0.3905	1.6095	2.3783	0.2284	1.7716	3.4723	0.0000	2.1266
		25	1.8642	0.4619	1.5381	2.3357	0.3257	1.6743	3.3758	0.0255	1.9745
	50	5	1.8547	0.0000	2.3115	2.5725	0.0000	2.8191	4.1647	0.0000	3.9449
		10	1.7705	0.1654	1.8346	2.3447	0.0000	2.1053	3.5978	0.0000	2.6960
		20	1.7604	0.4289	1.5711	2.2079	0.2836	1.7164	3.2596	0.0000	2.0576
		25	1.7569	0.4928	1.5072	2.1817	0.3702	1.6298	3.1792	0.0822	1.9178
	100	5	1.6880	0.0000	2.1936	2.3692	0.0000	2.6753	3.8802	0.0000	3.7437
		10	1.6718	0.2119	1.7881	2.1957	0.0000	2.0351	3.4070	0.0000	2.6061
		20	1.6941	0.4504	1.5496	2.1012	0.3183	1.6817	3.1157	0.0000	2.0109
		25	1.6965	0.5102	1.4898	2.0870	0.3975	1.6025	3.0455	0.1208	1.8792

Table 2. Fatores superiores de tolerância (U^*_{one}) do intervalo $(1-\alpha, \gamma)$ unilateral de tolerância k-sigma para S^2 de n observações considerando m amostras de tamanho n para estimar σ^2 usando S_p^2

			$1-\alpha$					
			0.90		0.95		0.99	
γ	m	n	k	U^*_{one}	k	U^*_{one}	k	U^*_{one}
0.95	10	5	2.7359	2.9346	3.6473	3.5790	5.6686	5.0083
		10	2.3848	2.1242	3.0707	2.4476	4.5275	3.1343
		20	2.1875	1.7097	2.7570	1.8945	3.9284	2.2745
		25	2.1417	1.6183	2.6853	1.7752	3.7939	2.0952
	25	5	2.1152	2.4957	2.8902	3.0437	4.6092	4.2592
		10	1.9498	1.9191	2.5695	2.2113	3.8856	2.8317
		20	1.8446	1.5985	2.3770	1.7712	3.4723	2.1266
		25	1.8189	1.5251	2.3311	1.6729	3.3758	1.9745
	50	5	1.8547	2.3115	2.5725	2.8191	4.1647	3.9449
		10	1.7547	1.8272	2.3447	2.1053	3.5978	2.6960
		20	1.6848	1.5466	2.1999	1.7138	3.2596	2.0576
		25	1.6670	1.4812	2.1645	1.6248	3.1792	1.9178
	100	5	1.6880	2.1936	2.3692	2.6753	3.8802	3.7437
		10	1.6254	1.7662	2.1957	2.0351	3.4070	2.6061
		20	1.5766	1.5115	2.0801	1.6749	3.1157	2.0109
		25	1.5637	1.4514	2.0512	1.5921	3.0455	1.8792

4. Exemplo de aplicação

Um exemplo interessante (ver [Montgomery 2006], página 213) é examinado a fim de ilustrar a construção e implementação de intervalos de tolerância. A aplicação estudada é a produção de anéis de pistão de um motor de automóvel num processo de fundição, onde a variável de interesse (característica de qualidade do produto) é a medida do diâmetro interno dos anéis fabricados. A Tabela 3 (Tabela 5-1 no [Montgomery 2006], página 213) mostra as medições do diâmetro interno dos anéis (lote de produção específico) agrupadas em vinte e cinco amostras ($m = 25$) cada uma de cinco observações ($n = 5$). [Montgomery 2006] indica que esses dados são coletados quando o processo está sob controle (Fase I), o que é verificado utilizando gráficos de controle. Assim, a variância do processo é estimada $\hat{\sigma}^2 = S_p^2 = 0.000101$.

Supondo que, para a aceitação ou rejeição de lotes de produção, o comprador dos anéis de pistão esteja interessado em que a variância de uma amostra de 5 observações seja muito pequena visto que os anéis devem ser intercambiáveis (na montagem de motores de automóveis) e a avaliação de lotes de produção são para amostras de tamanho $n = 5$. Portanto, neste processo, há um interesse em avaliar e controlar a variância da amostra da medida do diâmetro interno dos anéis.

a) Por um lado, se existir alguma especificação do valor máximo da variância amostral, poderíamos comparar esse limite de especificação superior (USL) com o limite superior do intervalo unilateral de tolerância ($\hat{S}^2_{U^*_{one}}$) obtido com os dados de referência da Tabela 3. Usando os fatores da Tabela 2 e o valor obtido de S_p^2, tem-se $\hat{S}^2_{U^*_{one}} = 0.000307$ do intervalo ($1 - \alpha = 0.95, \gamma = 0.95$) unilateral de tolerância k-sigma. Se $\hat{S}^2_{U^*_{one}} \leq USL$, o lote de produção avaliado (segundo os dados de referência da Tabela 3) deveria ser aceito. Caso contrário ($\hat{S}^2_{U^*_{one}} > USL$), o lote de produção deveria ser rejeitado.
b) Por outro lado, se não houver informação acerca das especificações do produto, o valor obtido do $\hat{S}^2_{U^*_{one}}$ pode ser utilizado como limite superior de especificação para futuros lotes de produção (ver, por exemplo, [Dong et al. 2015b]).
c) O uso de um limite unilateral superior de tolerância ($\hat{S}^2_{U^*_{one}}$) faz sentido nesta aplicação pois pequenos valores da variância amostral do diâmetro interno dos anéis são desejados e o interesse se centra na detecção de incrementos na variância da amostra (ver, por exemplo, outra aplicação em [Tietjen e Johnson 1979]). No entanto, nós podemos argumentar que o uso de um intervalo de tolerância bilateral pode ser relevante e fornecer informação mais completa do processo de fabricação dos anéis de pistão de um motor. Isto porque, mesmo que o uso de um limite unilateral superior de tolerância fornece informação sobre quão grande é a variância amostral da medida do diâmetro interno dos anéis (ou quão ruim é o processo de fabricação dos anéis de pistão), ela não fornece informação sobre quão pequena é essa variância amostral (ou quão bom é o processo de fabricação dos anéis de pistão), o que pode ser medido por um limite inferior. Desta forma, dado que pode haver interesse em saber quão grande e pequena é a variabilidade do processo estudado, o uso do intervalo de tolerância bilateral justifica-se nesta aplicação. O uso do intervalo bilateral de tolerância, poderia ser utilizado, por exemplo, na comparação da qualidade do produto de diferentes lotes de produção ou na comparação da qualidade do produto de diferentes fornecedores.
d) Usando os fatores de tolerância da Tabela 1 e o valor obtido de S_p^2, o intervalo ($1 - \alpha = 0.95, \gamma = 0.95$) bilateral de tolerância k-sigma obtido será ($\hat{S}^2_{L^*_{two}} = 0, \hat{S}^2_{U^*_{two}} = 0.000307$). Nota-se que $\hat{S}^2_{U^*_{two}} = \hat{S}^2_{U^*_{one}}$ dado que $\hat{S}^2_{L^*_{two}} = 0$. No caso do intervalo ($1 - \alpha = 0.80, \gamma = 0.90$) bilateral de tolerância k-sigma, os limites obtidos serão $\hat{S}^2_{L^*_{two}} = 0.000012$ e $\hat{S}^2_{U^*_{two}} = 0.000190$ (usando as Equações (6), (7) e (12)), onde os fatores de este intervalo ($L^*_{two} = 0.1153$ e $U^*_{two} = 1.8847$) não são fornecidos na

Tabela 1.

Table 3. Medições do diâmetro interno dos anéis (lote de produção específico) agrupadas em vinte e cinco amostras ($m = 25$) cada uma de cinco observações ($n = 5$). [Montgomery 2006]

Número de amostras (i)	Observações (j)					
	1	2	3	4	5	S_i^2
1	74.030	74.002	74.019	73.992	74.008	0.000218
2	73.995	73.992	74.001	74.011	74.004	0.000056
3	73.988	74.024	74.021	74.005	74.002	0.000218
4	74.002	73.996	73.993	74.015	74.009	0.000083
5	73.992	74.007	74.015	73.989	74.014	0.000149
6	74.009	73.994	73.997	73.985	73.993	0.000076
7	73.995	74.006	73.994	74.000	74.005	0.000030
8	73.985	74.003	73.993	74.015	73.988	0.000150
9	74.008	73.995	74.009	74.005	74.004	0.000031
10	73.998	74.000	73.990	74.007	73.995	0.000040
11	73.994	73.998	73.994	73.995	73.990	0.000008
12	74.004	74.000	74.007	74.000	73.996	0.000018
13	73.983	74.002	73.998	73.997	74.012	0.000109
14	74.006	73.967	73.994	74.000	73.984	0.000234
15	74.012	74.014	73.998	73.999	74.007	0.000053
16	74.000	73.984	74.005	73.998	73.996	0.000061
17	73.994	74.012	73.986	74.005	74.007	0.000112
18	74.006	74.010	74.018	74.003	74.000	0.000049
19	73.984	74.002	74.003	74.005	73.997	0.000072
20	74.000	74.010	74.013	74.020	74.003	0.000064
21	73.982	74.001	74.015	74.005	73.996	0.000148
17	74.004	73.999	73.990	74.006	74.009	0.000055
18	74.010	73.989	73.990	74.009	74.014	0.000142
19	74.015	74.008	73.993	74.000	74.010	0.000076
20	73.982	73.984	73.995	74.017	74.013	0.000262
					S_p^2	0.000101

5. Considerações finais e conclusões

Na avaliação da conformidade e aceitação de produtos (ou processos), os intervalos de tolerância para a população das variâncias amostrais (ou, equivalentemente, para a distribuição amostral da variância) podem ser muito uteis quando o usuário está interessado na precisão ou homogeneidade dos valores da característica da qualidade. Intervalos de tolerância unilaterais ou bilaterais podem ser utilizados dependendo do contexto da aplicação.

Limites superiores de intervalos unilaterais de tolerância para variâncias amostrais podem ser utilizados quando o controle de incrementos na variância é a questão mais importante, assim, os limites inferiores são considerados irrelevantes e não são considerados. No entanto, em muitas aplicações práticas, embora seja útil saber quão grande pode ser a variabilidade do processo (deterioração do processo) usando apenas limites superiores, a informação que pode ser obtida usando limites inferiores pode ser relevante, dado que estes limites podem indicar quão pequena seria a variabilidade do processo (melhoria do processo).

Pode-se notar que a construção de intervalos bilaterais de tolerância é matematicamente mais complicada do que no caso unilateral porque o cálculo dos limites é baseado em um método numérico (por exemplo, um algoritmo de busca), e algumas derivações exatas, que é descrito passo a passo neste trabalho. Pode-se verificar que ao contrário do cálculo dos limites de tolerância do intervalo bilateral, o limite superior de tolerância ($\hat{S}^2_{U^*_{one}}$) do intervalo unilateral pode ser obtido diretamente mediante derivações exatas dado que o valor de $\hat{S}^2_{U^*_{one}}$ é equivalente a um limite superior de um intervalo unilateral com $100\gamma\%$ de confiança para o $(1-\alpha)$-quantil de S^2 (ou seja, é equivalente a um intervalo de confiança (superior unilateral) de um percentil de S^2).

Com as formulas dos fatores e limites de tolerância fornecidos neste trabalho, o usuário poderá construir e implementar intervalos de tolerância (unilateral e bilateral) para qualquer aplicação. Obviamente que a quantidade de fatores apresentados nas Tabelas 1 e 2 pode ser ampliada considerando valores adicionais de m, n, $1-\alpha$ e γ.

Até onde sabemos, intervalos bilaterais de tolerância para S^2 não têm sido estudados na literatura existente, nem tabelas dos fatores de tolerância têm sido fornecidas. Portanto, nosso trabalho aborda os intervalos de tolerância para a população de variâncias amostrais provenientes de dados normais, visando contribuir para o desenvolvimento deste tema específico da Estatística Inferencial.

Agradecimentos

À CAPES pelo apoio financeiro recebido.

Referências

Cai, T. T., e Wang, H. (2009). Tolerance intervals for discrete distributions in exponential families. *Statistica Sinica*, 19, pp. 905-923.

Chakraborti, S., Graham, M. A. e Human, S. W. (2009). Phase I Statistical Process Control Charts: An overview and some results. *Quality Engineering*, 21, pp. 52-62.

Costa, A. F. B., Epprecht, E. K. e Carpinetti, L. C. R. (2005). Controle estatístico de qualidade. São Paulo: Atlas.

Di Bucchianico, A., Einmahl, J. H. e Mushkudiani, N. A. (2001). Smallest nonparametric tolerance regions. *Annals of Statistics*, 29(5), pp. 1320-1343.

Dong, X., Tsong, Y. e Shen, M. (2015b). Statistical considerations in setting product specifications. *Journal of Biopharmaceutical Statistics*, 25(2), pp. 280-294.

Dong, X., Tsong, Y., Shen, M. e Zhong, J. (2015a). Using tolerance intervals for assessment of pharmaceutical quality. *Journal of Biopharmaceutical Statistics*, 25(2), pp. 317-327.

Fraser, D. A. S. (2011). Is Bayes posterior just quick and dirty confidence? *Statistical Science*, pp. 299-316.

Guttman, I. (1970). Statistical Tolerance Regions: Classical and Bayesian. London: Charles Griffin and Company, vol. 26. Hafner Pub. Co.

Hahn, G. J. (1970). Statistical Intervals for a Normal Population Part I. Tables, Examples and Applications. *Journal of Quality Technology*, 2(3), pp. 115-125.

Hamada, M., Johnson, V., Moore, L. M. e Wendelberger, J. (2004). Bayesian prediction intervals and their relationship to tolerance intervals. *Technometrics*, 46(4), pp. 452-459.

Jílek, M. e Ackermann, H. (1989). A bibliography of statistical tolerance regions, II. *Statistics: A Journal of Theoretical and Applied Statistics*, 20(1), pp. 165-172.

Jones-Farmer, L. A., Woodall, W. H., Steiner, S. H. e Champ, C. W. (2014). An Overview of Phase I Analysis for Process Improvement and Monitoring. *Journal of Quality Technology* 46(3), pp. 265-280.

Krishnamoorthy, K. e Mathew, T. (2009). Statistical tolerance regions: theory, applications, and computation. Vol. 744. John Wiley & Sons, New York.

Krishnamoorthy, K., Mathew, T. e Mukherjee, S. (2008). Normal-based methods for a gamma distribution: Prediction and tolerance intervals and stress-strength reliability. *Technometrics*, 50(1), pp. 69-78.

Krishnamoorthy, K., Xia, Y. e Xie, F. (2011). A simple approximate procedure for constructing binomial and Poisson tolerance intervals. *Communications in Statistics-Theory and Methods*, 40(12), pp. 2243-2258.

Lai, Y. H., Yen, Y. F. e Chen, L. A. (2012). Validation of tolerance interval. *Journal of Statistical Planning and Inference*, 142(4), pp. 902-907.

Meeker, W. Q., Hahn, G. J. e Escobar, L. A. (2017). Statistical Intervals: A Guide for Practitioners and Researchers. Vol. 541. John Wiley & Sons, New York.

Montgomery, D. C., Runger, G. C. e Calado, V. (2000). Estatística Aplicada E Probabilidade Para Engenheiros. Grupo Gen-LTC.

Montgomery, D.C. (2006). Control estadístico de la calidad, 3a ed. Editorial Limusa, México, D.F.

Murphy, R. B. (1948). Non-parametric tolerance limits. *The Annals of Mathematical Statistics*, 19(4), pp. 581-589.

Patel, J. K. (1986). Tolerance limits-a review. *Communications in statistics-Theory and Methods*, 15(9), pp. 2719-2762.

Shirke, D. T., Kumbhar, R. R. e Kundu, D. (2005). Tolerance intervals for exponentiated scale family of distributions. *Journal of Applied Statistics*, 32(10), pp. 1067-1074.

Tietjen, G. L. e Johnson, M. E. (1979). Exact statistical tolerance limits for sample variances. *Technometrics*, 21(1), pp. 107-110.

Vangel, M. G. (2008). Tolerance interval. In Encyclopedia of Biostatistics, 2nd ed. (P. Armitage and T. Colton, eds.), John Wiley & Sons, New York, pp. 5477-5482.

Vardeman, S. B. (1992). What about the other intervals?. *The American Statistician*, 46(3), pp. 193-197.

Wang, H. e Tsung, F. (2009). Tolerance intervals with improved coverage probabilities for binomial and Poisson variables. *Technometrics*, 51(1), pp. 25-33.

Wilks, S. S. (1941). Determination of sample sizes for setting tolerance limits. *The Annals of Mathematical Statistics*, 12(1), pp. 91-96.

Wilks, S. S. (1942). Statistical prediction with special reference to the problem of tolerance limits. *The annals of mathematical statistics*, 13(4), pp. 400-409.

Young, D. S. e Mathew, T. (2014). Improved nonparametric tolerance intervals based on interpolated and extrapolated order statistics. *Journal of Nonparametric Statistics*, 26(3), pp. 415-432.