Problema da Deposição Gamma: Prova de NP-Completude e um Novo Modelo de Programação Linear Inteira

Marcelo Fonseca Faraj
DCC - Universidade Federal de Minas Gerais
Belo Horizonte - MG - Brasil
marcelofaraj@gmail.com

Sebastián Alberto Urrutia
DCC - Universidade Federal de Minas Gerais
Belo Horizonte - MG - Brasil
surrutia@dcc.ufmg.br

João Fernando Machry Sarubbi
DECOM - Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais
Belo Horizonte - MG - Brasil
joao@decom.cefetmg.br

RESUMO

A Deposição Gamma é uma métrica utilizada para avaliar a qualidade de serviço oferecida por redes veiculares. A definição do Problema da Deposição Gamma decorre diretamente do emprego dessa métrica na minimização das unidades de infraestrutura de comunicação alocadas para compor redes veiculares. Neste trabalho, apresenta-se uma prova de que a versão de decisão desse problema pertence à classe de complexidade NP-Completo. Adicionalmente, é discutida a formulação de programação linear inteira multifluxo presente na literatura e é proposta uma nova formulação, baseada em cobertura de conjuntos por vértices. Nos experimentos realizados em um resolvedor comercial, a formulação proposta apresenta resultados amplamente superiores aos obtidos com a formulação original.

PALAVRAS CHAVE. Deposição Gamma, NP-Completo, Programação Linear Inteira.

ABSTRACT

Gamma Deployment is a metric to evaluate the quality of service in vehicular ad hoc networks (VANETs). We define Gamma Deployment Problem as the application of that metric to minimize the amount of roadside units deployed in a VANET. In this work, we present a proof that the decision version of the Gamma Deployment Problem belongs to the class of complexity NP-Complete. We show the multi-flow integer linear programming formulation present in the literature and propose a small correction for it. In addition, we present a new formulation based on a set covering approach. In our experiments with a commercial solver, the set-covering formulation widely outperformed the multi-flow formulation.

KEYWORDS. Gamma Deployment, NP-Complete, Integer Linear Programming.

https://proceedings.science/p/85373?lang=pt-br

1. Introdução

Redes veiculares, ou VANETs (do inglês *Vehicular Ad Hoc Networks*), (ZEADALLY et al., 2012) constituem uma das mais importante aplicações dentro do que se convencionou chamar de tráfego inteligente. Elas têm potencial para gerar maior segurança nas estradas, bem como uma gerência de tráfego mais inteligente e acesso a conteúdos interativos (AL-SULTAN et al., 2014).

A comunicação em redes veiculares pode ocorrer de três modos distintos: entre veículos (V2V), entre unidades de infraestrutura (I2I) e entre veículos e unidades de infraestrutura (V2I) (ASLAM; AMJAD; ZOU, 2012). Os três modos de comunicação podem ocorrer concomitantemente. Não obstante, a presença de unidades de infraestrutura de comunicação, conhecidas como RSUs (do inglês *Roadside Units*), é responsável por aumentar consideravelmente a eficiência da rede e assegurar seu funcionamento em momentos de baixo tráfego de veículos (SILVA et al., 2016a).

A Deposição Gamma ($\Gamma_D\binom{\tau}{\rho}$) foi proposta por Silva et al. (2016a) como uma métrica para avaliar a qualidade de serviço (QdS) de deposições de RSUs em VANETs a partir de seu tráfego veicular. Na Deposição Gamma, há dois parâmetros que o arquiteto da VANET atinja pode ajustar para atingir seus objetivos de projeto: o tempo de intercontato τ e cobertura percentual mínima exigida ρ. Considera-se que um dado veículo esteja coberto pela VANET caso ele não permaneça mais que τ segundos sem passar pela área de cobertura de alguma RSU ao longo de toda sua viagem. O parâmetro ρ estabelece a porcentagem mínima obrigatória de veículos cobertos. Por exemplo, uma restrição $\Gamma_D\binom{40}{0.6}$ exige que pelo menos 60% dos veículos que passam pela VANET encontrem ao menos uma RSU a cada 40 segundos de suas viagens. Embora a Deposição Gamma tenha sido originalmente proposta como uma métrica de QdS, sua direta aplicação no planejamento de uma deposição de RSUs define um problema de otimização combinatória. Este trabalho será focado nesse problema, o qual será referido como o Problema da Deposição Gamma (PDG).

Mesmo que não tratado por esse nome, o PDG já foi assunto de alguns trabalhos. Silva et al. (2016a) propuseram uma formulação de programação linear inteira baseada em uma abordagem multifluxo e a heurística Gamma-G, constituída de três etapas consecutivas: uma construção gulosa e duas buscas locais. Em outro artigo, Silva et al. (2016b, 2016c) comparam, à luz de diversos aspectos aplicados, Gamma-G à estratégia intuitiva de realizar a deposição de RSUs nas regiões com maior tráfego na VANET. Faraj et al. (2017) propõem um algoritmo memético, heurística que mostra resultados superiores aos de Gamma-G. Apesar de terem sido propostas heurísticas e uma formulação de programação linear inteira para resolvê-lo, ainda não consta na literatura prova de que o PDG seja realmente NP-Difícil.

Neste trabalho, é desenvolvida uma demonstração de que o PDG pertence à classe de complexidade NP-Completo. Em seguida, apresenta-se a formulação de programação linear inteira proposta por Silva et al. (2016a), a qual utiliza uma abordagem multifluxo. Uma pequena correção é feita para contemplar o caso em que haja ciclos em rotas veiculares. Também se propõe uma nova formulação de programação linear inteira baseada em cobertura de conjuntos por vértices. Por fim, são apresentados e analisados os resultados de experimentos com as duas formulações. Os resultados foram consideravelmente superiores para a formulação cobertura, a qual foi capaz de resolver 31 das 36 instâncias executadas na otimalidade, enquanto a formulação multifluxo resolveu otimamente apenas 4 dessas.

O restante deste artigo está organizado como se segue: a seção 2 fornece uma definição rigorosa para o PDG com base na teoria dos grafos; a seção 3 apresenta a demonstração detalhada de que o PDG é NP-Completo; na seção 4, apresenta-se a formulação multifluxo de Silva et al. (2016a); na seção 5, detalha-se a nova formulação cobertura proposta neste trabalho; na seção 6, são apresentados os experimentos realizados e analisados os resultados obtidos; por fim, a seção 7 apresenta as conclusões do trabalho e sugestões de trabalhos futuros.

2. O Problema da Deposição Gamma

Nesta seção, será dada uma definição formal do PDG utilizando conceitos de Teoria dos Grafos. Para isso, seja um passeio T_i uma sequência de vértices tal que haja uma aresta entre cada

https://proceedings.science/p/85373?lang=pt-br

par de vértices consecutivos. Além disso, seja $L(T_i)$ o número de vértices (distintos ou não) no passeio T_i e seja $T_i[j]$ o vértice na posição j de T_i, sendo $j \in \{1, \ldots, L(T_i)\}$. Por fim, considere-se que a operação de subtrair um conjunto R de um passeio T_i resulte em uma coleção de subpasseios de T_i, a qual é obtida a partir da remoção em T_i de todos os elementos presentes em R. Essa operação será denotada por $T_i \setminus R$, como no seguinte exemplo: $(1, 7, 2, 3, 1, 4, 5, 6, 7) \setminus \{1, 5\} = \{(7, 2, 3), (4), (6, 7)\}$.

Definição 1 (Problema da Deposição Gamma)**.** *Seja $G = (V, E)$ um grafo e $T = \{T_1, \ldots, T_p\}$ uma coleção de passeios em G. Seja $F : T \times \mathbb{Z}_+^* \to \mathbb{R}_+^*$ uma função associando um número real positivo a cada etapa j de cada passeio $T_i \in T$, $i \in \{1, \ldots, L(T_i)\}$. Seja $\tau \in \mathbb{R}_+^*$, $\rho \in [0\%, 100\%]$ e $K \in \mathbb{Z}_+^*$ parâmetros adicionais ao problema. O Problema da Deposição Gamma consiste em determinar se existe ou não um conjunto $R \subseteq V$ tal que $|R| \leq K$ e, para pelo menos uma fração ρ dos passeios $T_i \in T$, é satisfeita a desigualdade $\sum_{c=1}^{L(C)} F(C, c) < \tau$ para todo $C \in T_i \setminus R$.*

A Definição 1 sugere uma maneira de verificar se uma instância do problema tem uma solução SIM ou NÃO. Essa consiste em verificar se cada $C \in T_i \setminus R$ satisfaz $\sum_{c=1}^{L(C)} F(C, c) < \tau$, o que pode ser executado em tempo polinomial, uma vez que o número de elementos em $T_i \setminus R$ é limitado superiormente por $L(T_i)$. Com isso, fica claro que a versão de decisão do PDG pertence à classe de problemas NP.

Apesar de a definição do Problema da Deposição Gamma não se restringir a dada topologia de grafos G, Silva et al. (2016a) trataram da situação específica em que G possuía topologia de grade (para uma definição de grafos grade, vide Itai, Papadimitriou e Szwarcfiter (1982)). Além disso, eles propuseram uma abordagem prática de discretização para expressar qualquer rede rodoviária na forma de grades, o que torna essa topologia ainda mais relevante. Devido a esse fato, este trabalho dá um enfoque especial ao Problema da Deposição Gamma em Grades (PDGG).

3. Prova de NP-Completude

Nesta seção, é demonstrada a NP-Completude do PDG. Na seção 3.1, a estratégia utilizada nas demonstrações é brevemente apresentada, juntamente com algumas definições precisas dos problemas intermediários utilizados. Na seção 3.2, as demonstrações são explicitadas.

3.1. Estratégia de Demonstração

A estratégia demonstrativa aqui empregada se inicia pela prova de um resultado intermediário de NP-Completude, o qual alguns leitores poderão julgar relevante em si mesmo. Essa demonstração intermediária partirá do Problema da Cobertura de Arestas por Vértices em Grafos Planos com Grau Máximo 3, o qual é NP-Completo (GAREY; JOHNSON, 1977).

Definição 2 (Problema da Cobertura de Arestas por Vértices em Grafos Planos com Grau Máximo 3)**.** *Dado um grafo plano $G = (V, E)$, no qual todos os vértices tem grau menor ou igual a 3, e um número inteiro positivo K, existe um conjunto $R \subseteq V$ tal que todas as arestas em E têm pelo menos uma extremidade em R e $|R| \leq K$?*

Partindo do Problema da Cobertura de Arestas por Vértices em Grafos Planos com Grau Máximo 3, será feita uma redução polinomial ao Problema da Cobertura de Caminhos por Vértices em Grades. Este consiste em um caso especial do Problema da Cobertura de Conjuntos por Vértices em que os elementos a escolher são os vértices de uma grade e os conjuntos a cobrir são caminhos simples nessa grade. Até onde temos conhecimento, esse problema ainda não foi proposto na literatura.

Definição 3 (Problema da Cobertura de Caminhos por Vértices em Grades)**.** *Dada uma grade $G = (V, E)$, uma coleção S de caminhos simples em G e um número inteiro positivo K, existe um conjunto $R \subseteq V$ que tenha interseção não vazia com todos os caminhos em S tal que $|R| \leq K$?*

A etapa final da demonstração consiste em, partindo de uma instância genérica do Problema da Cobertura de Caminhos por Vértices em Grades, mostrar uma redução polinomial para o Problema da Deposição Gamma em Grades.

https://proceedings.science/p/85373?lang=pt-br

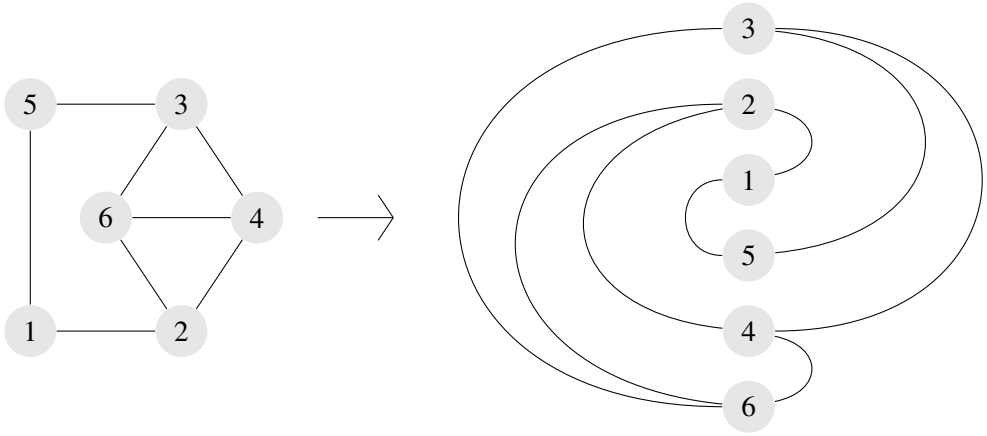


Figura 1: Incorporação de um grafo planar com grau máximo menor ou igual a 3 em um livro de 2 páginas.

3.2. As Demonstrações

Nesta seção, cada etapa da demonstração de NP-Completude do PDGG é explicitada.

Lema 1. *O Problema da Cobertura de Caminhos por Vértices em Grades é NP-Completo.*

Demonstração. Dado um grafo planar $G = (V, E)$, no qual o grau máximo é menor ou igual a 3, e um número inteiro positivo K, objetiva-se construir uma grade G', uma coleção de caminhos S e um número inteiro positivo K'. Isso deve ser feito de modo que haja uma cobertura de arestas por vértices em G de tamanho menor ou igual a K se, e somente se, houver uma cobertura dos caminhos em S por vértices, no grafo $G' = (V', E')$, que seja de tamanho menor ou igual a K'. Seja $V = \{1, ..., n\}$ o conjunto dos vértices de G e seja $|E| = m$ o número de arestas em G.

Em uma Incorporação em Livro (do inglês *book embedding*) de um grafo $G = (V, E)$, todos os seus vértices são linearmente dispostos na espinha do livro e ordenados em uma ordem específica, a qual é dada pela função $F_V : V \to \mathbb{Z}_+^*$. Além disso, cada aresta do grafo é atribuída a uma página específica do livro de acordo com uma função $F_E : E \to \mathbb{Z}_+^*$. Chama-se de página um semi-plano que parte da espinha do livro. Todas as arestas atribuídas a uma página estão contidas no seu semi-plano e não se cruzam entre sí. Heath (1985) demonstrou que todos os grafos planos com grau máximo menor ou igual a 3 podem ser incorporados em um livro de 2 páginas. Assim, a primeira etapa da transformação consiste em realizar uma incorporação do grafo G em um livro de 2 páginas, como exemplificado na Figura 1. Esse procedimento pode ser realizado por meio de alguns algoritmos polinomiais (HEATH, 1985; BEKOS; GRONEMANN; RAFTOPOULOU, 2016).

Seja $G' = (V', E')$ uma grade com $V' = \{1, ..., 3n\} \times \{1, ..., 2n - 1\}$ e seja $E' = \{((a, b), (c, d)), \forall (a, b), (c, d) \in V' : (|a - c| = 1 \wedge b = d) \vee (a = c \wedge |b - d| = 1)\}$. Seja $H \subset V'$ associado aos vértices de G seguindo sua ordem dada por F_V, de modo que $H = \{(3(F_V(v)) - 1, n), \forall v \in V(G)\}$.

A coleção $S = \{S_1, ...S_m\}$ é construída com m caminhos, sendo cada um deles um subgrafo de G' e correspondendo a uma das arestas em $E(G)$. Os vértices extremos de cada um desses caminhos pertencem ao conjunto H. Desse modo, objetiva-se assegurar que diferentes caminhos somente podem passar por um mesmo vértice caso este pertença a H. Para obter essa propriedade, cada caminho de $(a, b) \in H$ para $(c, d) \in H$ é construído seguindo as seguintes regras:

1. Cada caminho precisa ter uma componente vertical. Se a aresta e correspondente em $E(G)$ for tal que $F_E(e)$ é a página esquerda, essa componente deve passar por vértices na coluna $n - \frac{|b-d|}{3}$. Caso contrário, deve passar por vértices na coluna $n + \frac{|b-d|}{3}$;

https://proceedings.science/p/85373?lang=pt-br

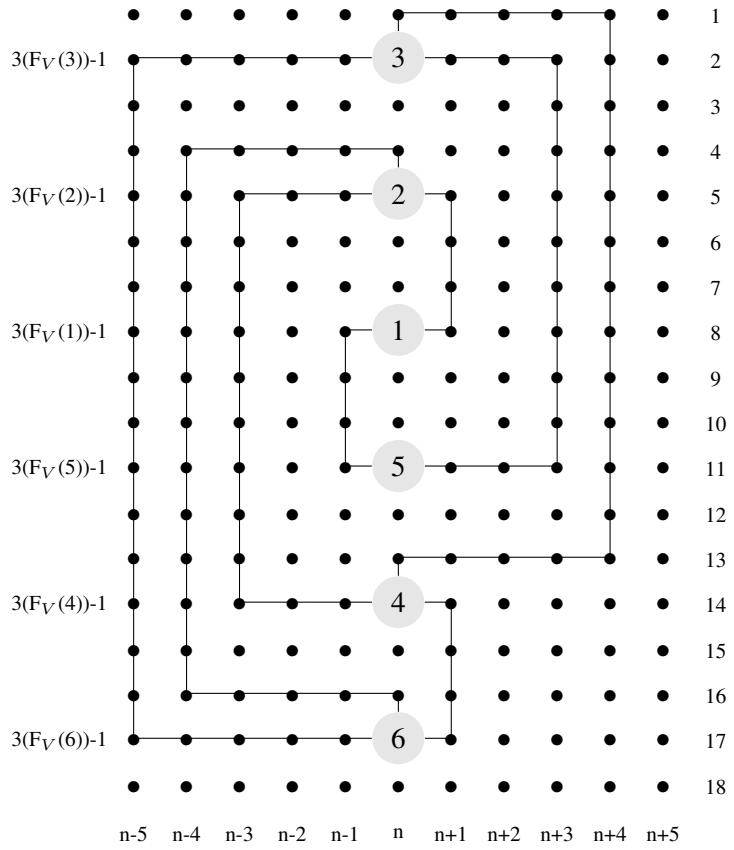


Figura 2: Vértices da grade e coleção dos caminhos obtidos a partir da incorporação do grafo em um livro de 2 páginas.

2. Para cada vértice $v \in V(G)$, pelo menos uma das duas páginas deve conter 0 ou 1 de suas arestas já que o grau do vértice é no máximo 3. Caso haja uma aresta nessa página, seu caminho correspondente em S tem uma componente horizontal iniciada no vértice $(3(f_V(v)) - 1, n)$, a qual se encontra com a componente vertical mencionada na regra 1;

3. Para alguns vértices $v \in V(G)$, há uma página em que há 2 ou 3 de suas arestas. Nesse caso, cada um dos caminhos correspondentes deve deixar o vértice $(3(f_V(v))-1, n)$ em uma direção diferente (norte, sul ou horizontal) com base na regra 1 de modo a evitar cruzamentos. Após passar por um nodo, o caminho prossegue horizontalmente até encontrar a componente vertical mencionada na regra 1.

Caso sejam seguidas as regras acima, demonstra-se por absurdo que, para cada par de caminhos $S_1, S_2 \in S$, eles apenas podem se interceptar em suas extremidades, ou seja, $S_1 \cap S_2 \subseteq H$. Considere-se a hipótese de que existam dois caminhos, $S_1 = (u_1, \ldots, u_2)$ e $S_2 = (w_1, \ldots, w_2)$, os quais se interceptem em um vértice não presente em H e assuma sem perda de generalidade que $F_V(u_1) < F_V(u_2)$ e $F_V(w_1) < F_V(w_2)$. Sabe-se que cada extremidade de um caminho tem um vértice correspondente no grafo G. Por razões de simplificação, serão utilizados os mesmos símbolos (u_1, u_2, w_1 e w_2) para se referir a cada um desses vértices respectivos em $V(G')$ e em $V(G)$. Considere-se o caso em que uma extremidade de S_1 coincide com uma extremidade de S_2. As regras 2 e 3 asseguram que os sub-caminhos horizontais dos caminhos de S_1 e S_2 sempre ocorram em linhas diferentes dentre as três linhas que se encontram em torno da linha que contém sua extremidade correspondente, a qual pertence a H. Isto é sempre possível já que o grau máximo de cada vértice de G é no máximo 3. Acrescentando-se a informação da regra 1, fica claro que

https://proceedings.science/p/85373?lang=pt-br

não pode ocorrer intercepção em qualquer ponto de S_1 e S_2 que não pertença a H. Considere-se agora o caso em que u_1, u_2, w_1 e w_2 são vértices distintos. É evidente a impossibilidade de que haja um cruzamento de caminhos caso $F_V(u_1)$ e $F_V(u_2)$ sejam ambos maiores ou menores do que $F_V(w_1)$ e $F_V(w_2)$. No caso de termos $F_V(u_1) < F_V(w_1) < F_V(w_2) < F_V(u_2)$ ou $F_V(w_1) < F_V(u_1) < F_V(u_2) < F_V(w_2)$, não é possível que ocorra intersecção de caminhos devido à regra 1. As únicas opções restantes são $F_V(u_1) < F_V(w_1) < F_V(u_2) < F_V(w_2)$ ou $F_V(w_1) < F_V(u_1) < F_V(w_2) < F_V(u_2)$. Nesse caso, as arestas $(u_1, u_2), (w_1, w_2) \in E(G)$ devem certamente pertencer a páginas diferentes na incorporação em livro do grafo, ou seja, $F_E(u_1, u_2) \neq F_E(w_1, w_2)$. Assim, conclui-se que S_1 e S_2 não podem se encontrar em vértices não pertencentes a H.

A Figura 2 ilustra V' e todos os caminhos em S obtidos a partir das regras 1, 2 e 3 aplicadas ao grafo exibido como produto na transformação mostrada na Figura 1. Segue-se a indagação: é possível encontrar uma cobertura de caminhos por vértices de tamanho não maior que $K' = K$? Nos parágrafos seguintes, prova-se que, se a resposta para o Problema da Cobertura de Arestas por Vértices em Grafos Planos com Grau Máximo 3 for SIM, então a resposta para o Problema da Cobertura de Caminhos por Vértices em Grades em (G', S, K') também deve ser SIM, e vice versa.

Seja a hipótese de que há um conjunto R de cardinalidade $|R| \leq K$ que consiste em uma cobertura de arestas por vértices em (G, K), mas que a resposta para o Problema da Cobertura de Caminhos por Vértices em Grades em (G', S, K') seja NÃO. Como já foi mostrado, cada vértice de $H \subseteq G'$ está associado biunivocamente a um vértice de $V(G)$. Logo, é possível construir um conjunto $R' \subseteq H$ a partir da obtenção de cada elemento de H associado aos elementos em R. Uma vez que cada caminho em S tem suas duas extremidades em H, seguindo precisamente o mesmo padrão da aresta correspondente em $E(G)$, R' é uma cobertura para S em G' e tem cardinalidade $R' \leq K' = K$. Portanto, (G', S, K') é uma instância SIM, o que significa uma contradição à hipótese original.

Seja, agora, a hipótese de que há um conjunto R' de tamanho $|R'| \leq K'$, o qual consiste em uma cobertura de caminhos por vértices para (G', S, K'), mas que a resposta para o Problema da Cobertura de Arestas por Vértices em Grafos Planos com Grau Máximo 3 para (G, K) seja NÃO. Pela construção proposta para (G', S, K'), conforme demonstrado, fica garantido que todos os vértices em $V(G') \setminus H$ pertencem a, no máximo, um caminho em S. Se houver um caminho $S_i \in S$ com $S_i \cap R' \setminus H \neq \emptyset$, sabe-se que cada elemento $u \in S_i \cap R' \setminus H$ não cobre qualquer caminho que não seja S_i. Por isso, é possível remover u de R' e substituí-lo por um vértice em $H \cap S_i$. Após repetir o procedimento prescrito exaustivamente, obtém-se uma cobertura de caminhos por vértices $R'' \subseteq H$ com cardinalidade, no máximo, K'. Agora é possível construir uma cobertura de arestas por vértices $R \subseteq V(G)$ para G de cardinalidade menor ou igual a K, o que é feito obtendo-se cada vértice único em $V(G)$ associado a cada elemento em R''. Desse modo, a resposta para (G, K) é SIM, o que leva a uma contradição.

Finalmente, é trivial a prova de que o Problema da Cobertura de Caminhos por Vértices em Grades está em NP. Para isso, dado um certificado R' para uma instância SIM (G', S, K'), basta checar a cardinalidade de R' bem como as interseções $S_i \cap R', \forall S_i \in S$, as quais devem ser não nulas para que a resposta seja SIM. □

Assim, fica demonstrada a NP-Completude do Problema da Cobertura de Caminhos por Vértices em Grades, resultado que será usado como premissa na prova do Teorema 1. O Corolário 1 consiste em uma generalização natural do Lema 1.

Corolário 1. *O Problema da Cobertura de Caminhos por Vértices é NP-Completo.*

Teorema 1. *O Problema da Deposição Gamma é NP-Completo*

Demonstração. Seja $G = (V, E)$ uma grade com $V = \{v_{ab}, \forall (a, b) \in \{1, ..., m\} \times \{1, ..., n\}\}$ e $E = \{(v_{ab}, v_{cd}), \forall \{v_{ab}, v_{cd}\} \subseteq V : (a-c = 1 \wedge b = d) \vee (a = c \wedge b-d = 1)\}$. Seja $S = \{S_1, ..., S_p\}$

https://proceedings.science/p/85373?lang=pt-br

uma coleção de sub-grafos de G tal que $S_i \in S$ é um caminho em G. Sendo $K \in \mathbb{Z}_+^*$, pergunta-se: é possível obter uma cobertura de caminhos por vértices $R \subseteq V$ de cardinalidade menor ou igual a K?

Dada essa instância do Problema da Cobertura de Caminhos por Vértices em Grades, que será referida por $PCCVG(G,S,K)$, será obtida a instância $PDGG(G', T, F, \tau, \rho, K')$, do Problema da Deposição Gamma em Grades. Em seguida, será mostrado que $PCCVG(G, S, K)$ é uma instância SIM se, e somente se, $PDGG(G', T, F, \tau, \rho, K')$ também é uma instância SIM.

Seja $G' = G, T = S, K' = K, \tau = 1$ e $\rho = 100\%$. Para cada passeio $T_i \in T$, seja F uma função definida como $F(T_i, x) = \frac{1}{L(T_i)}, \forall x \in \{1, \ldots, L(T_i)\}$. Após realizar essa transformação, a seguinte igualdade é válida para cada $T_i \in T$:

$$\sum_{c=1}^{L(T_i)} F(T_i, c) = 1 = \tau \tag{1}$$

Para construir uma prova por absurdo, considere-se a hipótese de que há um conjunto $R \subseteq V$ que é solução para $PCCVG(G, S, K)$ mas não para $PDGG(G', T, F, \tau, \rho, K')$. Essa hipótese implica a existência de um passeio $T_i \in T$ contendo um sub-passeio $C \in T_i \setminus R$ que satisfaça a desigualdade $\sum_{c=1}^{L(C)} F(C, c) \geq \tau$. Então, pela Equação (1), pode-se deduzir que, neste caso, $T_i \cap R = \emptyset \rightarrow S_i \cap R = \emptyset$. Consequentemente, R não é uma cobertura de caminhos por vértices na instância $PCCVG(G, S, K)$ já que o caminho S_i não está coberto. Portanto chega-se a uma contradição.

Seguindo a demonstração, considere-se a hipótese de que há um conjunto R que é solução para $PDGG(G', T, F, \tau, \rho, K')$ mas não para $PCCVG(G, S, K)$. Essa hipótese implica a existência de um caminho $S_i \in S$, $S_i \cap R = \emptyset$. Já que $T_i = S_i$, então $T_i \cap R = \emptyset$ e $T_i \setminus R = \{T_i\}$. Consequentemente, existe um único subpasseio $C \in T_i \setminus R$ tal que $\sum_{c=1}^{L(C)} F(C, c) = 1 \geq \tau$. Assim, R não é solução para $PDGG(G', T, F, \tau, \rho, K')$, o que é uma contradição. Por fim, o Problema da Deposição Gamma pertence a NP, já que um certificado R^* de uma instância SIM pode ser verificado deterministicamente em tempo polinomial, como mostrado na seção 2. □

Da demonstração de NP-Completude do PDG, seguem-se naturalmente os corolários 2 e 3, que apresentam resultados ainda mais fortes. Ambos os corolários têm grande relevância, já que se referem a situações específicas contempladas nos experimentos de Silva et al. (2016a, 2016b, 2016c) e Faraj et al. (2017) e também nos experimentos apresentados na seção 6.

Corolário 2. *O Problema da Deposição Gamma em Grades é NP-Completo.*

Corolário 3. *O Problema da Deposição Gamma em Grades com $\rho = 1$ é NP-Completo.*

4. Formulação de Programação Linear Inteira Multifluxo

Nesta seção, será apresentada a formulação de programação linear inteira proposta por Silva et al. (2016a), a qual emprega uma abordagem multifluxo. Seja um grafo $G = (V, E)$ com topologia em grade, uma coleção de passeios $T_i \in T$, $i \in \{1, \ldots, L(T_i)\}$. Seja $F : T \times \mathbb{Z}_+^* \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ uma função associando um número real positivo a cada etapa j de cada passeio $T_i \in T$. Esses dados podem ser facilmente obtidos pelo procedimento de discretização de um traço de mobilidade veicular descrito por Silva et al. (2016a). Além disso, sejam os parâmetros $\tau \in \mathbb{R}_+^*$ e $\rho \in [0\%, 100\%]$.

Realiza-se um preprocessamento no qual é construído um grafo direcionado h_i para cada passeio T_i. Silva et al. (2016a) definem como vértices deste grafo os próprios vértices de G pelos quais T_i passa. Como ficará claro mais adiante, essa definição funciona perfeitamente caso nenhum passeio contenha ciclos, mas introduz restrições equivocadas caso contrário. Um ajuste sutil que resolve esse problema consiste em considerar que cada vértice de h_i é definido como um par ordenado contendo o identificador do vértice correspondente em G e a ordem em que este aparece em T_i, ou seja, $(T_i[v], v)$, $v \in \{1, \ldots, L(T_i)\}$.

https://proceedings.science/p/85373?lang=pt-br

Antes definir os arcos de h_i, são inseridos 2 vértices artificiais: a origem (s, s) e o destino (t, t). Do vértice (s, s), partem arcos para todos os vértices $(T_i[v], v)$ tais que $\sum_{k=1}^{v-1} F(T_i, k) < \tau$. Ao vértice (t, t), chegam arcos de todos os vértices $(T_i[v], v)$ tais que $\sum_{k=v+1}^{L(T_i)} F(T_i, k) < \tau$. Por fim, existe um arco de $(T_i[u], u)$ para $(T_i[w], w)$ se, e somente se, $u < w$ e $\sum_{k=u+1}^{w-1} F(T_i, k) < \tau$.

Seja $\delta_i^+(a, u)$ o conjunto de todos os índices w tais que $((a, u), (T_i[w], w))$ é um arco do grafo h_i. Igualmente, seja $\delta_i^-(b, w)$ o conjunto de todos os índices u tais que $((T_i[u], u), (b, w))$ é um arco do grafo h_i. Além disso, considerem-se as seguintes variáveis de decisão:

$$c_a = \begin{cases} 1 & \text{se } a \in V(G) \text{ pertence à solução;} \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

$$z_i = \begin{cases} 1 & \text{se o passeio } T_i \text{ é coberto pela solução;} \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

$$f^i_{aubw} = \begin{cases} 1 & \text{se o arco } ((a, u), (b, w)) \text{ do grafo } h_i \text{ é usado no caminho de } (s, s) \text{ a } (t, t); \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Segue a formulação linear inteira:

$$\min \sum_{a \in V(G)} c_a \tag{2}$$

Sujeito a

$$\sum_{k \in \delta_i^+(s,s)} f^i_{ss(T_i[k])k} = z_i \qquad \forall i | T_i \in T \tag{3}$$

$$\sum_{k \in \delta_i^-(t,t)} f^i_{(T_i[k])ktt} = z_i \qquad \forall i | T_i \in T \tag{4}$$

$$\sum_{k \in \delta_i^-(l)} f^i_{(T_i[k])kl} - \sum_{k \in \delta_i^+(l)} f^i_{l(T_i[k])k} = 0 \quad \forall i | T_i \in T, \forall l \in (V(h_i) \setminus \{(s, s), (t, t)\}) \tag{5}$$

$$f^i_{aul} \leq c_a \quad \forall i | T_i \in T, \forall ((a, u), l) \in A(h_i) | a \notin \{s, t\} \tag{6}$$

$$f^j_{lau} \leq c_a \quad \forall i | T_i \in T, \forall (l, (a, u)) \in A(h_i) | a \notin \{s, t\} \tag{7}$$

$$\sum_{i | T_j \in T} z_i \geq \rho |T| \tag{8}$$

A função objetivo (2) minimiza o número de vértices escolhidos em $V(G)$. As restrições (3) garantem um caminho iniciado no nodo (s, s) em cada veículo coberto. De modo semelhante, as restrições (4) garantem um caminho terminado no nodo (t, t) em cada veículo coberto. As restrições (5) garantem a conservação de fluxo para todos os nodos de h_i, exceto (s, s) e (t, t). As restrições (6) e (7) garante que um fluxo apenas pode cruzar nodos de h_i associados a vértices escolhidos de G. Finalmente, a restrição (8) assegura a cobertura de uma porcentagem de passeios ρ.

Conforme mencionado, Silva et al. (2016a) consideraram que os vértices de h_i advinham diretamente dos vértices de G. Desse modo, a variável de decisão f^i_{aubw} não continha todos os índices aqui referidos, indexada como f^i_{ab}, em que $a, b \in V(G)$. Desse modo, as restrições de conservação de fluxo (5), por exemplo, geravam desigualdades inválidas em caso de um vértice de $V(G)$ ser visitado mais de uma vez por um mesmo passeio, podendo tornar o problema mais restrito do que de fato é ou mesmo inviável nesses casos particulares.

https://proceedings.science/p/85373?lang=pt-br

5. Formulação de Programação Linear Inteira Cobertura

Nesta seção, será proposta uma nova formulação de programação linear inteira, a qual emprega uma abordagem de cobertura de conjuntos por vértices. Seja um grafo $G = (V, E)$ com topologia em grade, uma coleção de passeios $T_i \in T$, $i \in \{1, \ldots, L(T_i)\}$. Seja $F : T \times \mathbb{Z}_+^* \to \mathbb{R}_+^*$ uma função associando um número real positivo a cada etapa j de cada passeio $T_i \in T$. Esses dados podem ser facilmente obtidos pelo procedimento de discretização de um traço de mobilidade veicular descrito por Silva et al. (2016a). Além disso, sejam os parâmetros $\tau \in \mathbb{R}_+^*$ e $\rho \in [0\%, 100\%]$.

Realiza-se um preprocessamento para construir a coleção S, cujos elementos são conjuntos $S_{ij} \subseteq V(G)$. Dado um passeio T_i em que $\sum_{k=1}^{L(T_i)} F(T_i, k) < \tau$, é gerado apenas o conjunto $S_{i1} = \{T_i[k], \forall k \in \{1, \ldots, L(T_i)\}\}$, cuja cobertura por um vértice é necessária para que T_i seja considerado coberto pela VANET. Dado um passeio em que $\sum_{k=1}^{L(T_i)} F(T_i, k) \geq \tau$, são gerados todos os conjuntos $S_{ij} = \{T_i[k], \forall k \in \{1, \ldots, y\}, y \leq L(T_i)\}$ que satisfaçam as desigualdades $\sum_{k=j}^{y} F(T_i, k) \geq \tau$ e $\sum_{k=j}^{y-1} F(T_i, k) < \tau$. Dito de outro modo, nesse caso, cada conjunto S_{ij} é o subpasseio minimal do passeio T_i iniciado em seu j-ésimo elemento e com $\sum_{k=j}^{|S_{ij}|} F(T_i, k) \geq \tau$. Pela transformação descrita, a quantidade de conjuntos S_{ij} é $|S| \leq \sum_{T_i \in T} |T_i|$, o que é claramente uma grandeza linear em relação ao tamanho do problema original.

Considerem-se as seguintes variáveis de decisão:

$$c_a = \begin{cases} 1 & \text{se } a \in V(G) \text{ pertence à solução;} \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

$$z_i = \begin{cases} 1 & \text{se o passeio } T_i \text{ é coberto pela solução;} \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Segue a formulação linear inteira:

$$\min \sum_{a \in V(G)} c_a \tag{9}$$

Sujeito a

$$\sum_{a \in S_{ij}} c_a \geq z_i \quad \forall S_{ij} \in S \tag{10}$$

$$\sum_{i=1}^{L(T_i)} z_i \geq |T| \times \rho \tag{11}$$

A função objetivo (9) minimiza o número de vértices escolhidos em $V(G)$. As restrições (10) garantem que cada conjunto S_{ij} associado a um passeio T_i é coberto por ao menos um dos vértices selecionados. A restrição (11) garante que ao menos uma porcentagem ρ dos passeios serão cobertos.

6. Experimentos

Nesta seção, são apresentados os resultados dos experimentos realizados para comparar a formulação de programação linear inteira proposta neste trabalho à presente na literatura. Os experimentos foram executados com uma base de dados de traços de mobilidade urbana na cidade de Colônia, Alemanha[1]. Ela não consiste de dados mensurados, mas sim de uma simulação realística, como é detalhado por Uppoor e Fiore (2011). Os procedimentos de tratamento prévio

[1]Disponível no endereço http://kolntrace.project.citi-lab.fr/

https://proceedings.science/p/85373?lang=pt-br

Tabela 1: Resultados da formulação de programação linear inteira multifluxo, proposta por Silva et al. (2016a), e da formulação de programação linear inteira cobertura de conjuntos por vértices, proposta neste trabalho.

Parâmetros			**Formulação Multifluxo**			**Formulação Cobertura**		
$\|T\|$	τ	ρ	**Z***	**GAP(%)**	**Tempo(s)**	**Z***	**GAP(%)**	**Tempo(s)**
		0,6	217	-	1136,97	217	-	0,27
	40	**0,8**	311	-	414,27	311	-	0,14
		1	470	-	633,85	470	-	0,02
		0,6	134	8,71	3600,00	129	-	0,62
100	**80**	**0,8**	196	7,54	3600,00	186	-	0,16
		1	285	4,2	3600,00	281	-	0,05
		0,6	88	13,07	3600,00	83	-	0,22
	120	**0,8**	126	8,25	3600,00	122	-	0,14
		1	200	11,87	3600,00	189	-	0,05
		0,6	987	57,1	3600,00	441	-	5,74
	40	**0,8**	678	8,37	3600,00	643	-	2,75
		1	944	0,71	3600,00	944	-	0,09
		0,6	693	69,31	3600,00	247	-	62,57
500	**80**	**0,8**	807	60,95	3600,00	359	-	20,14
		1	2354	78,22	3600,00	540	-	0,12
		0,6	532	76,96	3600,00	153	-	647,19
	120	**0,8**	636	70,61	3600,00	233	-	61,15
		1	2356	86,32	3600,00	360	-	0,28
		0,6	1264	61,43	3600,00	544	-	32,2
	40	**0,8**	1544	51,98	3600,00	789	-	23,43
		1	1178	1,54	3600,00	1177	-	0,14
		0,6	871	72,29	3600,00	294	0,67	3600,00
1000	**80**	**0,8**	1033	64,7	3600,00	436	-	136,19
		1	2708	76,27	3600,00	682	-	0,2
		0,6	697	100,00	3600,00	180	2,04	3600,00
	120	**0,8**	809	100,00	3600,00	270	-	470,2
		1	2710	85,37	3600,00	449	-	0,57
		0,6	2907	81,93	3600,00	591	-	3038,6
	40	**0,8**	2909	73,02	3600,00	870	-	49,43
		1	1324	2,23	3600,00	1309	-	0,17
		0,6	2910	100,00	3600,00	322	2,28	3600,00
1500	**80**	**0,8**	2913	100,00	3600,00	476	-	669,09
		1	2929	75,33	3600,00	777	-	0,36
		0,6	806	100,00	3600,00	195	3,63	3600,00
	120	**0,8**	930	100,00	3600,00 -	295	1,13	3600,00
		1	2930	97,34	3600,00	507	-	0,65

https://proceedings.science/p/85373?lang=pt-br

e discretização da base de dados seguiram rigorosamente os mesmos procedimentos descritos por Silva et al. (2016a, 2016b, 2016c) e Faraj et al. (2017).

Após o preprocessamento, foram selecionados os subconjuntos dos dados contendo os primeiros 100, 500, 1000 e 1500 passeios da base original. Para cada subconjunto T, foram geradas instâncias de acordo com o critério $\Gamma_D\binom{\tau}{\rho}$ em todas as permutações possíveis dos parâmetros $\tau \in \{40s, 80s, 120s\}$ e $\rho \in \{0,6; 0,8; 1,0\}$. Foi utilizada uma máquina com processador Intel Xeon E5405 2.00GHz, memória RAM de 15GB e sistema operacional Ubuntu. Para cada instância, estabeleceu-se um tempo máximo de execução de 1 hora (3600 segundos) por formulação. A execução dos modelos matemáticos foi realizada utilizando o resolvedor comercial CPLEX, versão 12.6.0.0.

A Tabela 1 apresenta os resultados obtidos nos experimentos com a formulação original, de Silva et al. (2016a), e com a formulação proposta neste trabalho. Pode-se observar que os resultados da nova formulação foram superiores aos resultados da formulação anterior em 31 das 36 instâncias quando o critério de comparação é o tempo de execução, empatando nas demais 5 instâncias. Quando o critério de comparação é a qualidade da solução obtida, a nova formulação é superior à anterior em 32 das 36 instâncias, empatando nas demais 4 instâncias. Se o critério for a comprovação de otimalidade, pode-se observar que o novo modelo fechou o Gap de dualidade em 34 instâncias, enquanto o modelo original o fez em apenas 3 instâncias. Vistos os resultados, é possível concluir que as instâncias utilizadas não são suficientemente grandes ou complexas, já que a formulação cobertura foi capaz de resolver todas na otimalidade ou quase na otimalidade.

Uma indagação poderia ser feita em relação à justiça da comparação de formulações, uma vez que os tempos de preprocessamento demandados para geração das instâncias não estão discriminados na Tabela 1 e poderiam ter apresentado alguma discrepância significativa. Entretanto, o leitor poderá perceber que, mesmo no preprocessamento, a formulação original é mais complexa que a formulação proposta. Esta gera um número linear de restrições e de variáveis, além de demandar que não mais que dois laços percorram cada passeio no preprocessamento. Aquela, diferentemente, gera um número muito grande de variáveis e restrições, além de demandar que seja construído um grafo associado a cada passeio, o qual pode ser denso em alguns casos.

7. Conclusão

Deposição Gamma é o nome dado a uma métrica proposta por Silva et al. (2016a) para avaliar a qualidade de serviço oferecida por redes veiculares. O Problema da Deposição Gamma é definido como o emprego dessa métrica na minimização da alocação de unidades de infraestrutura de comunicação para compor redes veiculares.

Neste trabalho, foi demonstrada a NP-Completude da versão de decisão desse problema. A importância dessa contribuição se deve ao fato de que esse resultado havia sido apenas conjecturado em trabalhos anteriores (SILVA et al., 2016a, 2016b, 2016c; FARAJ et al., 2017), havendo ainda necessidade de uma prova formal que justificasse o emprego de heurísticas na solução de instâncias de grande porte. Como corolários, algumas classes particulares de instâncias do Problema da Deposição Gamma também tiveram sua NP-Completude demonstrada. Essas classes particulares haviam sido já implicitamente tratadas como NP-Completas outros artigos.

Em seguida, foi proposta uma pequena correção à formulação de programação linear inteira multifluxo proposta por Silva et al. (2016a). A formulação originalmente proposta podia gerar restrições inválidas para instâncias contendo passeios com ciclos. Uma nova formulação, baseada em cobertura, também foi proposta, a qual tem uma descrição mais simplificada e facilmente compreensível e implementável Nos experimentos realizados com um resolvedor comercial, a formulação cobertura apresentou resultados consideravelmente superiores aos obtidos por meio da formulação multifluxo.

Para trabalhos futuros, sugere-se buscar novas bases de dados a fim de testar mais amplamente as formulações de programação linear inteira e também compará-las às heurísticas presentes na literatura. Também é sugerível a implementação de métodos exatos às formulações, tais como

https://proceedings.science/p/85373?lang=pt-br

Branch & Cut e *Branch & Price*. Por fim, é desejável investigar a existência de algoritmos parametrizados e aproximativos para o Problema da Deposição Gamma.

Referências

AL-SULTAN, S.; AL-DOORI, M. M.; AL-BAYATTI, A. H.; ZEDAN, H. A comprehensive survey on vehicular ad hoc network. **Journal of network and computer applications**, Elsevier, v. 37, p. 380–392, 2014.

ASLAM, B.; AMJAD, F.; ZOU, C. C. Optimal roadside units placement in urban areas for vehicular networks. In: IEEE. **Computers and Communications (ISCC), 2012 IEEE Symposium on**. [S.l.], 2012. p. 423–429.

BEKOS, M. A.; GRONEMANN, M.; RAFTOPOULOU, C. N. Two-page book embeddings of 4-planar graphs. **Algorithmica**, Springer, v. 75, n. 1, p. 158–185, 2016.

FARAJ, M. F.; SARUBBI, J. a. F. M.; SILVA, C. M. da; MARTINS, F. V. C. A hybrid genetic algorithm for deploying rsus in vanets based on inter-contact time. In: **Proceedings of the Genetic and Evolutionary Computation Conference Companion**. New York, NY, USA: ACM, 2017. (GECCO '17), p. 193–194. ISBN 978-1-4503-4939-0. Disponível em: ⟨http://doi.acm.org/10.1145/3067695.3076032⟩.

GAREY, M. R.; JOHNSON, D. S. The rectilinear steiner tree problem is np-complete. **SIAM Journal on Applied Mathematics**, SIAM, v. 32, n. 4, p. 826–834, 1977.

HEATH, L. S. **Algorithms for embedding graphs in books**. Tese (Doutorado) — University of North Carolina at Chapel Hill, 1985.

ITAI, A.; PAPADIMITRIOU, C. H.; SZWARCFITER, J. L. Hamilton paths in grid graphs. **SIAM Journal on Computing**, SIAM, v. 11, n. 4, p. 676–686, 1982.

SILVA, C. M.; GUIDONI, D. L.; SOUZA, F. S.; PITANGUI, C. G.; SARUBBI, J. F.; PITSILLIDES, A. Gamma deployment: Designing the communication infrastructure in vehicular networks assuring guarantees on the v2i inter-contact time. In: IEEE. **Mobile Ad Hoc and Sensor Systems (MASS), 2016 IEEE 13th International Conference on**. [S.l.], 2016. p. 263–271.

SILVA, C. M.; GUIDONI, D. L.; SOUZA, F. S.; PITANGUI, C. G.; SARUBBI, J. F.; AQUINO, A. L.; MEIRA, W.; NOGUEIRA, J. M. S.; PITSILLIDES, A. Using the inter-contact time for planning the communication infrastructure in vehicular networks. In: IEEE. **Intelligent Transportation Systems (ITSC), 2016 IEEE 19th International Conference on**. [S.l.], 2016. p. 2089–2094.

SILVA, C. M.; PITANGUI, C. G.; GUIDONI, D. L.; SOUZA, F. S.; SARUBBI, J. F. Deposição gamma: Alocando infraestrutura de comunicação para redes veiculares garantindo o intervalo entre contatos de veículos com a infraestrutura de comunicação. In: SBPO. **Simpósio Brasileiro de Pesquisa Operacional (SBPO), 2016**. [S.l.], 2016.

UPPOOR, S.; FIORE, M. Large-scale urban vehicular mobility for networking research. In: IEEE. **Vehicular Networking Conference (VNC), 2011 IEEE**. [S.l.], 2011. p. 62–69.

ZEADALLY, S.; HUNT, R.; CHEN, Y.-S.; IRWIN, A.; HASSAN, A. Vehicular ad hoc networks (vanets): status, results, and challenges. **Telecommunication Systems**, Springer, v. 50, n. 4, p. 217–241, 2012.

https://proceedings.science/p/85373?lang=pt-br