ANÁLISE DE MODELOS MATEMÁTICOS PARA O PROBLEMA DA MÚLTIPLA PARTIÇÃO DE NÚMEROS

Alexandre Frias Faria
Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais (CEFET-MG)
Av. Amazonas 7675, 30510-000 – Nova Gameleira – Belo Horizonte – MG – Brasil
alexandrefrias1@hotmail.com

Sérgio Ricardo de Souza
Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais (CEFET-MG)
Av. Amazonas 7675, 30510-000 – Nova Gameleira – Belo Horizonte – MG – Brasil
sergio@dppg.cefetmg.br

Carlos Alexandre Silva
Instituto Federal de Minas Gerais (IFMG)
Av. Serra da Piedade 299, 34515-640 – Morada da Serra – Sabará – MG – Brasil
carlos.silva@ifmg.edu.br

Elisangela Martins de Sá
Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais (CEFET-MG)
Av. Amazonas 7675, 30510-000 – Nova Gameleira – Belo Horizonte – MG – Brasil
elisangela.martinss@gmail.com

RESUMO

Este artigo apresenta quatro variantes de modelos matemáticos para o Problema da Múltipla Partição de Números. Este problema consiste em distribuir os elementos de uma sequência dada em k subconjuntos disjuntos. O objetivo é minimizar o intervalo que contém os pesos de todos os subconjuntos. Os resultados descritivos mostram que algumas variantes de formulações matemáticas são capazes de encontrar soluções ótimas em tempo limitado sem esgotar a memória computacional. Os testes estatísticos realizados demonstram diferenças significativas entre os modelos matemáticos. O fator que mais influencia a qualidade da solução é a redução do número de variáveis referentes ao k-ésimo subconjunto.

PALAVRAS CHAVE. Otimização Combinatória. Problema da Partição de Números. Programação Inteira.

ABSTRACT

This paper presents four variants of mathematical models applied to Multi-way Number Partitioning Problem. This problem consists in distributing the elements of a given sequence into k disjoint subsets. Its goal is to minimize the range containing the weights of all subsets. The descriptive results show that some variants of mathematical formulations are able to find optimal solutions in a limited time without running out of computational memory. The statistical tests performed show significant differences between mathematical models. The most influential factor for solution quality is the reduction of the number of variables referring to the k^{th} subset.

KEYWORDS. Combinatorial Optimization. Number Partitioning Problem. Integer Programming.

https://proceedings.science/p/85359?lang=pt-br

1. Introdução

Uma partição de um conjunto X é uma coleção de subconjuntos mutuamente disjuntos cuja união forma X. Uma k-partição é uma partição tendo exatamente k subconjuntos não vazios. Nesse texto, os subconjuntos pertencentes à partição são chamados de partes, o conjunto $\mathbb{Z}_+$ indica números inteiros estritamente positivos e usa-se a notação $I_n = \{x \in \mathbb{Z} \,:\, 1 \leq x \leq n\}$, denotando o conjunto de todos os inteiros entre 1 e n, inclusive.

O Problema da Partição de Números (*Two-way Number Partitioning Problem* - TWNPP) consiste em encontrar uma 2-partição para os índices de uma sequência dada. O objetivo do problema é minimizar a diferença entre as somas dos elementos em partes distintas. Uma generalização do TWNPP é o Problema da Múltipla Partição de Números (*Multi-way Number Partitioning Problem* - MWNPP). Neste problema, fixa-se o número de partes nas quais os elementos da sequência V devem ser distribuídos com um inteiro positivo k. Seja o peso $g(A_j)$ dado pela soma dos elementos cujos índices estão contidos na parte A_j. Dada uma sequência numérica V, o objetivo é encontrar uma k-partição para seus índices, de modo que o conjunto de pesos $\{g(A_j)\}_{j=1}^{k}$ fique contido no menor intervalo possível. Isto se resume a ter $\max\{g(A_{j'})\}$ tão próximo de $\min\{g(A_j)\}$ quanto possível.

Existe uma ampla literatura sobre o TWNPP e suas variações. Ele foi listado de modo formal em Karp [1972] como um dos problemas NP-completos básicos em que uma série de equivalências entre o TWNPP e outros problemas NP-completos são demonstradas. O MWNPP aparece explicitamente em um artigo sobre uma heurística construtiva denominada *Differencing Method*, mais conhecida como Heurística de Karmarkar-Karp (KKH), proposta por Karmarkar e Karp [1982], na qual os autores também demonstram resultados teóricos e práticos sobre a eficiência da heurística proposta e sobre a dificuldade das instâncias do problema. Michiels et al. [2003] demonstra uma razão de aproximação $\frac{4}{3} - \frac{1}{3(k-1)}$ para KKH. Este resultado impõe um intervalo de erro limitado aos valores obtidos com KKH quando aplicado ao Problema de Escalonamento em Máquinas Idênticas (*Multiprocessor Scheduling Problem* – MSP), sendo similar à razão encontrada no algoritmo *Longest Processing Time* (LPT), proposto em Graham [1966, 1969], que é o primeiro algoritmo de aproximação conhecido.

Gent e Walsh [1998] mostra que o MWNPP é um problema muito difícil de ser solucionado por meta-heurísticas de uso geral, como Algoritmos Genéticos, *Simulated Annealing* e outros. Em muitos casos, esses métodos perdem em tempo e desempenho para o KKH e até mesmo para o LPT, quando adaptados para a solução do MWNPP. Korf [1998] propôs a construção de algoritmos exatos, fazendo um procedimento *Backtrack* em heurísticas construtivas, como LPT e KKH, chamadas de *Complete Greedy Algorithm* e *Complete Karmarkar-Karp Algorithm*, respectivamente. A primeira melhoria desses trabalhos acontece com o algoritmo *Recursive Number Partitioning*, proposto por Korf [2009]. A segunda melhoria é a contribuição de Pedroso e Kubo [2010], em que é proposta uma nova estrutura de dados aplicada ao trabalho de Korf [2009], agilizando a busca na árvore de Karmarkar-Karp. Por meio de sucessivas conversões do MWNPP de uma $(k-1)$-partição para uma k-partição, Moffitt [2013] propõem um algoritmo baseado em resolução de subproblemas menores.

Atualmente, o estado da arte para o MWNPP é o algoritmo *Sequential Number Partitioning*, apresentado em Korf et al. [2013], e o algoritmo *Cached Iterative Weakening*, apresentado em Schreiber e Korf [2014]. Uma análise completa e de grande interesse sobre esses algoritmos encontra-se em Schreiber [2014].

A discussão sobre a função objetivo do MWNPP apresentada em Korf [2010] mostra as diferenças dos objetivos de seus artigos e do trabalho seminal de Narendra Karmarkar e Richard M. Karp em 1982 Karmarkar e Karp [1982]. Muitos artigos apresentam o modelo matemático do MSP como uma formulação matemática do MWNPP. De fato, o TWNPP é equivalente ao MSP com duas máquinas, mas, quando o número de máquinas é maior que 2, não é possível estender esta equivalência ao MWNPP. Encontram-se contraexemplos de que esta extrapolação é errada em

https://proceedings.science/p/85359?lang=pt-br

Korf [2010].

Dado um modelo matemático inicial para o MWNPP, podem-se usar técnicas de redução de variáveis e inclusão de restrições baseadas no conhecimento da relação entre as soluções factíveis do modelo matemático e do conjunto de todas as k-partições. Geralmente, tal relação é sobrejetiva na grande maioria dos problemas de otimização combinatória, principalmente quando envolvem partições, o que é condição suficiente para que o modelo matemático resolva o problema corretamente, mas não necessária.

Este artigo apresenta um estudo de modelos matemáticos aplicados ao MWNPP. Partindo de um modelo matemático mais simples, proposto em Faria et al. [2015], variantes melhoradas do mesmo, como Faria et al. [2017], e mais outras duas ideias independentes de melhoria do modelo matemático são discutidas. A análise principal foca no limite superior e inferior encontrado por cada modelo matemático ao resolver um conjunto de instâncias usando o resolvedor comercial CPLEX. O tempo computacional gasto é similar nos 4 modelos matemáticos e, portanto, não é analisado. Testes estatísticos mostram o efeito das modificações aplicadas e destacam as mais e menos efetivas.

O artigo está organizado da seguinte maneira: a Seção 2 apresenta o enunciado do problema e a codificação clássica; a Seção 3 mostra os modelos matemáticos estudados e melhorias propostas; a Seção 4 apresenta um delineamento dos testes realizados para a comparação das modificações aplicadas; e a Seção 5 critica os resultados obtidos com base no escopo do trabalho e propõe uma continuação da pesquisa.

2. Descrição do Problema

O MWNPP é a versão abordada, originalmente, em Karmarkar e Karp [1982]. Sua entrada é uma sequência V e a saída é uma k-partição dos índices de V.

Definição 2.1. *Seja $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ uma sequência de inteiros positivos e k um número inteiro positivo. O Problema da k-Partição de Números consiste em encontrar uma k-partição dos índices de V, na forma $\{A_1, A_2, \ldots, A_k\}$, que minimize a função $f(\cdot)$ definida por:*

$$f(\{A_1, A_2, \ldots, A_k\}) = \max_{j'} \left\{ \sum_{i \in A_{j'}} v_i \right\} - \min_{j} \left\{ \sum_{i \in A_j} v_i \right\} \tag{1}$$

O Exemplo 2.1 a seguir mostra algumas situações desse problema.

Exemplo 2.1. *A sequência $V = \{11, 25, 13, 34, 89, 65, 43, 96, 56, 87\}$ pode ser particionado das seguintes maneiras para os valores $k \in \{3, 4, 5, 6\}$:*

Tabela 1: Soluções

	factível	ótimo
$k = 3$	$\underbrace{\{96, 43, 34\}}_{173}$, $\underbrace{\{89, 56, 25\}}_{170}$, $\underbrace{\{87, 65, 13, 11\}}_{176}$	$\underbrace{\{89, 87\}}_{176}$, $\underbrace{\{25, 13, 34, 43, 56\}}_{171}$, $\underbrace{\{11, 65, 96\}}_{172}$
$k = 4$	$\underbrace{\{96, 25, 13\}}_{134}$, $\underbrace{\{89, 34\}}_{123}$, $\underbrace{\{87, 43\}}_{130}$, $\underbrace{\{65, 56, 11\}}_{132}$	$\underbrace{\{25, 13, 89\}}_{127}$, $\underbrace{\{43, 87\}}_{130}$, $\underbrace{\{34, 96\}}_{130}$, $\underbrace{\{11, 65, 56\}}_{132}$
$k = 5$	$\underbrace{\{11, 89, 13\}}_{113}$, $\underbrace{\{25, 87\}}_{112}$, $\underbrace{\{96\}}_{96}$, $\underbrace{\{34, 65\}}_{99}$, $\underbrace{\{43, 56\}}_{99}$	
$k = 6$	$\underbrace{\{96\}}_{96}$, $\underbrace{\{89\}}_{89}$, $\underbrace{\{87\}}_{87}$, $\underbrace{\{11, 13, 65\}}_{89}$, $\underbrace{\{56, 25\}}_{81}$, $\underbrace{\{43, 34\}}_{77}$	$\underbrace{\{96\}}_{96}$, $\underbrace{\{89\}}_{89}$, $\underbrace{\{87\}}_{87}$, $\underbrace{\{11, 25, 43\}}_{79}$, $\underbrace{\{13, 65\}}_{78}$, $\underbrace{\{34, 56\}}_{90}$

Destaca-se que as partes não precisam ter a mesma cardinalidade.

https://proceedings.science/p/85359?lang=pt-br

Tabela 2: Função Objetivo

	factível	ótima
$k = 3$	176 - 170 = 6	176 - 171 = 5
$k = 4$	134 - 123 = 11	132 - 127 = 5
$k = 5$	113 - 96 = 17	112 - 99 = 13
$k = 6$	96 - 77 = 19	96 - 78 = 18

A codificação clássica usada para k-partições é um vetor de tamanho n, cujas entradas são números de 1 até k. Mais precisamente, um vetor s tal que $s_i = j$ se $v_i \in A_j$. Nesta codificação, é impossível ter $j > 1 + \max_{1 \leq l \leq i} s_l$ para evitar multiplicidades de soluções iguais. Resumindo, se $s_i = j$, então $\exists l < i \ : \ s_l = j - 1$. As regras ou propriedades da codificação são:

(i) O índice 1 de v_1 deve estar sempre na parte 1;

(ii) Uma parte j sempre terá pelo menos um índice i' menor que qualquer índice contido na parte $j + 1$. Isto vale para todo $j \in I_{k-1}$.

Estas condições encontram-se descritas em Nijenhuis e Wilf [2014], que apresenta as codificações mais eficientes conhecidas para fazer enumerações de estruturas combinatórias. Também existe uma demonstração da bijeção entre o conjunto das k-partições e a codificação apresentada em Orlov [2002].

Exemplo 2.2. *Considere as seguintes codificações de uma* 3*-partição:*

$$[1, 1, 1, 3, 2] \quad [1, 1, 1, 2, 3]$$

Observe que o primeiro vetor não satisfaz à propriedade (ii), enquanto o segundo vetor satisfaz. Isto acontece porque $[1, 3, 1, 2, 3] = [1, 2, 1, 3, 2]$*, representando a* 3*-partição* $\{v_1, v_3\}, \{v_2, v_5\}, \{v_4\}$.

Pela condição (ii) o elemento líder de j não pode ser maior que um elemento líder de uma parte $j' > j$, porque, assim, uma única solução teria várias codificações.

3. Formulações Matemáticas

Dentre os problemas de Otimização Inteira mais conhecidos da literatura, os mais próximos ao MWNPP são o Problema do Empacotamento (*Bin Packing Problem* - BPP) e o MSP. Um modelo matemático para o MWNPP herda características dos modelos de otimização inteira para MSP e BPP, encontrados em Crescenzi et al. [1997] e Ausiello et al. [2003].

3.1. Formulação Baseada em Variáveis Limitadoras

Esta formulação, proposta em Faria et al. [2015], usa a ideia de representar os limites do intervalo contendo todos os pesos $g(A_j) = \sum_{i \in A_j} v_i$ como variáveis inteiras estritamente positivas.

$$\begin{aligned}
\min \quad & t_2 - t_1 && \text{(2a)}\\
\text{suj. a} \quad & t_1 \leq \sum_{i=1}^{n} v_i x_{ji} \leq t_2, \quad \forall j \in I_k && \text{(2b)}\\
& \sum_{j=1}^{k} x_{ji} = 1, \quad \forall i \in I_n && \text{(2c)}\\
& t_1, t_2 \in \mathbb{Z}_+ && \text{(2d)}\\
& x_{ji} \in \{0, 1\}, \quad \forall (j, i) \in I_k \times I_n && \text{(2e)}
\end{aligned}$$

https://proceedings.science/p/85359?lang=pt-br

A expressão (2a) é o tamanho do intervalo que contém todos os k pesos das partes e o objetivo de minimização. As inequações (2b) mostram que o modelo garante que cada parte é não vazia, pois $t_1 > 0$, e também que todos os pesos das partes estão contidos no intervalo $[t_1, t_2]$, por efeito de (2d). As equações indicadas pela expressão (2c) garantem que as partes são disjuntas e que todos os elementos de V estão alocados em alguma parte. A relação (2d) informa que os limitantes da maior e menor soma dos elementos das partições são sempre positivos. A relação de pertinência (2e) indica que $x_{ji} = 1$, se o elemento de índice i do conjunto V pertence à parte de índice j, e $x_{ji} = 0$, caso contrário.

O modelo 2 contém $nk + 2$ variáveis e $2k + n$ restrições.

3.2. Eliminação de Variáveis no Triângulo Inferior à Esquerda

Como efeito da propriedade i, fixa-se a variável $x_{1,1} = 1$ como constante excluindo uma variável e uma restrição. A propriedade ii torna todas as variáveis do triângulo inferior à esquerda sem utilidade para o modelo, na forma $x_{ji} = 0 \quad \forall j > i$, porque todas as k-partições podem ser representadas sem elas. Esta formulação encontra-se em Faria et al. [2017].

Exemplo 3.1. *Seja $k = 3$, $n = 5$ e $\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$. Para qualquer valor que se queira atribuir aos v_i, as matrizes a seguir são soluções factíveis para o modelo matemático 2 e representam a mesma solução:*

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Esta reformulação produz o modelo matemático 3:

$$\begin{aligned}
\min \quad & t_2 - t_1 && \text{(3a)} \\
\text{suj. a} \quad & t_1 \leq \sum_{i=j}^{n} v_i x_{ji} \leq t_2, \quad \forall j \in I_k && \text{(3b)} \\
& \sum_{j=1}^{\min\{i,k\}} x_{ji} = 1, \quad \forall i \in I_n && \text{(3c)} \\
& t_1, t_2 \in \mathbb{Z}_+ && \text{(3d)} \\
& x_{ji} \in \{0, 1\}, \quad \forall (j, i) : i \geq j && \text{(3e)}
\end{aligned}$$

sem as variáveis em excesso citadas.

A expressão (3a) é o objetivo a ser minimizado e representa o tamanho do intervalo que contém todos os k pesos das partes. As k inequações (3b) mostram que o modelo garante que cada parte é não vazia, pois $t_1 > 0$ e que estão todas contidas no intervalo $[t_1, t_2]$. Como no modelo 2, as n equações indicadas pela expressão (3c) garantem que as partes são disjuntas e que todos os elementos de V estão alocados em alguma parte. A relação (3d) informa que os limitantes da maior e menor soma dos elementos das partes é sempre positiva. Por fim, a relação de pertinência (3e) indica que $x_{ji} = 1$ se o elemento de índice i do conjunto V pertence à parte de índice j e $x_{ji} = 0$, caso contrário. Somente pares (j, i) tais que $j \leq i$ devem ser definidos, pois a ordem das partes não altera a solução. Assim, o elemento v_l só pode estar nas partes entre 1 e l para qualquer solução factível do problema.

O modelo 3 tem $nk - 1 - \frac{k(k-1)}{2}$ variáveis e $2k + n - 1$ restrições.

https://proceedings.science/p/85359?lang=pt-br

3.3. Soluções Factíveis na Forma Escada

Esta variante visa adicionar restrições que produzem uma correspondência bijetiva entre o conjunto das soluções factíveis e o conjunto das k-partições. Pode-se permitir apenas matrizes cujas atribuições $x_{ji} = 1$ respeitem as regras i e ii da Seção 2.

Exemplo 3.2. *As duas matrizes abaixo são soluções factíveis para o modelo matemático 3, mas ambas representam a mesma* 3*-partição de um conjunto* $\{v_1, v_2, v_3\}, \{v_4\}, \{v_5\}$ *com* 5 *elementos:*

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ & 0 & 0 & 0 & 1 \\ & & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ & 0 & 0 & 1 & 0 \\ & & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Para eliminar isso deve-se estabelecer que uma parte j sempre terá pelo menos um elemento de V com um índice i mais baixo que o índice de qualquer elemento contido na parte $j+1$. Desta forma, deseja-se que apenas a segunda matriz do Exemplo 3.2 seja factível. Ou seja, as soluções factíveis devem estar, também, na forma escada. Deste modo, é valida a seguinte implicação:

$$\sum_{i=1}^{l} x_{j,i} = 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^{l+1} x_{j+1,i} = 0, \quad \forall 1 \leq l \leq n-k+j, j \in I_{k-1} - \{1\} \tag{4}$$

Usando a implicação material $P \rightarrow Q \Leftrightarrow \neg P \vee Q$, tem-se:

$$\sum_{i=1}^{l} x_{j,i} > 0 \ \vee \ \sum_{i=1}^{l+1} x_{j+1,i} = 0, \quad \forall 1 \leq l \leq n-k+j, j \in I_{k-1} - \{1\} \tag{5}$$

Finalmente, a expressão abaixo forma o novo conjunto de restrições a serem inseridos:

$$l \sum_{i=1}^{l} x_{j,i} \ - \ \sum_{i=1}^{l+1} x_{j+1,i} \geq 0, \quad \forall 1 \leq l \leq n-k+j, j \in I_{k-1} - \{1\} \tag{6}$$

Repare que é impossível $\sum_{i=j}^{l} x_{j,i} = 0$ e $\sum_{i=j+1}^{l} x_{j+1,i} \neq 0$, pois a inequação 6 teria um valor negativo. Com exceção disto, todas as demais possibilidades são válidas para esta restrição, o que mantém a propriedade lógica da implicação (4).

$$\begin{aligned}
\min \quad & t_2 - t_1 && \text{(7a)} \\
\text{suj. a} \quad & t_1 \leq \sum_{i=1}^{n} v_i x_{ji} \leq t_2, \quad \forall j \in I_k && \text{(7b)} \\
& \sum_{j=1}^{k} x_{ji} = 1, \quad \forall i \in I_n && \text{(7c)} \\
& l \sum_{i=1}^{l} x_{j,i} \ - \ \sum_{i=1}^{l+1} x_{j+1,i} \geq 0, \quad \forall j \in I_{k-1} - \{1\}, 1 \leq l \leq n-k+j && \text{(7d)} \\
& t_1, t_2 \in \mathbb{Z}_+ && \text{(7e)} \\
& x_{ji} \in \{0,1\}, \quad \forall (j,i) \in I_k \times I_n && \text{(7f)}
\end{aligned}$$

O modelo matemático (7) é o modelo (2) acrescido das restrições (7d) que permite apenas as matrizes na forma escada como soluções factíveis.

O modelo (7) tem nk variáveis e $2k + n + (k-1)(n-k) + \frac{(k-1)(k-2)}{2}$ restrições.

https://proceedings.science/p/85359?lang=pt-br

3.4. Eliminação da Parte k por Substituição

Nesta variante, se um elemento não pertence a nenhuma parte de índice 1 até $k-1$, então ele só pode pertencer à parte k. Portanto, a última linha do modelo matemático 2 é desnecessária. Pode-se usar a substituição:

$$x_{k,i} = 1 - \sum_{j=1}^{k-1} x_{ji}, \quad \forall i \in I_n \tag{8}$$

para reconstruir o modelo 2. São eliminadas n variáveis e modificadas as restrições (2c) para:

$$\sum_{j=1}^{k-1} x_{ji} \leq 1, \quad \forall i \in I_n \tag{9}$$

O modelo matemático 10 é o resultado desta reformulação do modelo matemático 2.

$$\begin{aligned}
\min \quad & t_2 - t_1 && \text{(10a)}\\
\text{suj. a} \quad & t_1 \leq \sum_{i=1}^{n} v_i x_{ji} \leq t_2, \quad \forall j \in I_{k-1} && \text{(10b)}\\
& t_1 \leq \sum_{i=1}^{n} v_i \left(1 - \sum_{j=1}^{k-1} x_{ji}\right) \leq t_2 && \text{(10c)}\\
& \sum_{j=1}^{k-1} x_{ji} \leq 1, \quad \forall i \in I_n && \text{(10d)}\\
& t_1, t_2 \in \mathbb{Z}_+ && \text{(10e)}\\
& x_{ji} \in \{0,1\}, \quad \forall (j,i) \in I_{k-1} \times I_n && \text{(10f)}
\end{aligned}$$

A restrição 10c indica que os elementos da parte k devem estar nos limites de $[t_1, t_2]$. As desigualdades 10d informam que um elemento não pertencente a nenhuma das $k-1$ primeiras partes, deve pertencer k-ésima parte, o complemento.

O modelo 10 contém $n(k-1)+2$ variáveis e $2k+n$ restrições.

4. Experimentos Computacionais

Os modelos matemáticos da seção 3 foram implementados com o resolvedor CPLEX versão 12.6, na configuração padrão, em linguagem `C++` e usando a interface `Concert`. Os testes computacionais foram realizados em um computador com processador Intel Core i7-3770 CPU de 3.4 GHz com 8 núcleos, 32GB de RAM e sistema operacional Ubuntu 16.04 de 64 bits usando compilador `clang` versão 3.8. Usa-se um único núcleo para em cada execução. As instâncias para os experimentos foram geradas aleatoriamente. As sequências V construídas têm n elementos, sendo $n \in \{100, 200, 400, 800\}$, e os elementos são inteiros, variando de 0 até 999999999999, com 12 algarismos uniformemente distribuídos. Para tanto, um número entre 0 e 9 é gerado aleatoriamente por 12 vezes consecutivas. Esse processo é repetido n vezes para a geração de uma sequência V para a instância. A Tabela 3 organiza as instâncias por suas características.

https://proceedings.science/p/85359?lang=pt-br

Tabela 3: Classificação das instâncias

	k=3	k=4	k=5	k=6
n=100	inst1, inst2 inst3, inst4 inst5	inst21, inst22 inst23, inst24 inst25	inst41, inst42 inst43, inst44 inst45	inst61, inst62 inst63, inst64 inst65
n=200	inst6, inst7 inst8, inst9 inst10	inst26, inst27 inst28, inst29 inst30	inst46, inst47 inst48, inst49 inst50	inst66, inst67 inst68, inst69 inst70
n=400	inst11, inst12 inst13, inst14 inst15	inst31, inst32 inst33, inst34 inst35	inst51, inst52 inst53, inst54 inst55	inst71, inst72 inst73, inst74 inst75
n=800	inst16, inst17 inst18, inst19 inst20	inst36, inst37 inst38, inst39 inst40	inst56, inst57 inst58, inst59 inst60	inst76, inst77 inst78, inst79 inst80

O objetivo dos experimentos computacionais deste artigo é fazer uma comparação entre cada formulação: modelo 2 - (M1), modelo 3 - (M2), modelo 7 - (M3) e modelo 10 - (M4), verificando se a aplicação das técnicas de melhoria dos modelos matemáticos são efetivas para o desempenho do resolvedor CPLEX. Os experimentos são executados no intervalo de tempo de $t = 1200$. As medidas de comparação estudadas são: tempo em segundos t; limite superior alcançado ub; limite inferior alcançado lb. Estas medidas são ideais para verificar se a aplicação das técnicas de melhoria dos modelos matemáticos são efetivas para o desempenho do resolvedor CPLEX. Durante a coleta de dados, algumas execuções usaram memória *swap*. Estes resultados foram retirados do trabalho para que a comparação fosse justa.

Uma análise descritiva dos dados mostra que o modelo (2) encontrou o ótimo em apenas uma instância (inst3). O modelo (3) resolveu otimamente 4 instâncias: inst1, inst2, inst8 e inst14. O modelo (7) não encontrou o ótimo de nenhuma instância. O modelo 10 resolveu otimamente 7 instâncias: inst1, inst3, inst4, inst8, inst9, inst12, inst17.

Tabela 4: Dados descritivos do modelo M1

status		ub	lb	t
Feasible:79	Min.	0	-1.400e-05	1060
Optimal : 1	1st Qu.	101211	-1.000e-06	1199
	Median	704716	-8.334e-07	1199
	Mean	1396442	-1.045e-06	1195
	3rd Qu.	2256268	0.000e+00	1200
	Max.	7657330	0.000e+00	1200

Tabela 5: Dados descritivos do modelo M2

status		ub	lb	t
Feasible:76	Min.	0	-1.098e-05	12.52
Optimal : 4	1st Qu.	144354	-1.000e-06	1198.82
	Median	627262	-4.795e-09	1199.20
	Mean	1192292	-7.059e-07	1166.45
	3rd Qu.	1966558	0.000e+00	1199.46
	Max.	7286880	0.000e+00	1199.72

https://proceedings.science/p/85359?lang=pt-br

Tabela 6: Dados descritivos do modelo M3

status		ub	lb	t
Feasible:55	Min.	11032	-5.168e-06	1190
	1st Qu.	154262	-1.000e-06	1200
	Median	535950	-3.962e-07	1200
	Mean	1643378	-7.489e-07	1200
	3rd Qu.	2713720	0.000e+00	1201
	Max.	13593400	0.000e+00	1207

Tabela 7: Dados descritivos do modelo M4

status		ub	lb	t
Feasible:73	Min.	0	-1.698e-05	41.45
Optimal : 7	1st Qu.	47248	-2.000e-06	1199.14
	Median	209410	-6.286e-08	1199.59
	Mean	373629	-1.458e-06	1147.20
	3rd Qu.	479654	0.000e+00	1199.74
	Max.	2789720	0.000e+00	1199.94

Os dados do experimento são independentes por construção e, portanto, cabe uma análise estatística. O delineamento do experimento é o seguinte: cada modelo matemático é um fator e os resultados das instâncias resolvidas por cada modelo constituem as réplicas. São 4 fatores, sendo o modelo (M1) com 80 réplicas; o modelo (M2) com 80 réplicas; o modelo (M3) com 55 réplicas (devido ao uso de memória it swap) e o modelo (M4) com 80 réplicas. As medidas de comparação usadas são o limite superior ub e t, porque a medida lb não foi distante de 0 para todos os dados. Usa-se a linguagem R e suas bibliotecas para a execução dos testes [R Core Team, 2018].

Em relação ao ub, tem-se que a premissa de homocedasticidade dos dados é rejeitada pelo Teste de Levene. Uma alternativa seria usar o *Welch's ANOVA* para contornar este problema, mas, após o teste, verifica-se que os resíduos também não são normais. Resta usar o teste não paramétrico de Kruskal-Wallis [Kruskal e Wallis, 1952] para verificar se existe diferença estatística com confiança de 95% entre as formulações matemáticas testadas. Neste teste, o p-valor igual a $2,664e-06$ mostra que há diferença estatística significativa entre os limitantes superiores dos modelos matemáticos testados. A realização posterior de um Teste de Wilcoxon de Múltiplas Comparações com p-valor ajustado pelo método de Benjamini e Hochberg [1995] mostra que a diferença significativa ocorre quando o modelo (M4) é comparado com qualquer outro. Nenhum dos outros modelos matemáticos (M1), (M2) e (M3) apresentam diferenças entre si. Este resultado se mantém para todos os métodos de ajuste de p-valor presentes no R.

Tabela 8: Múltiplas comparações usando Teste de Wilcoxon

p-valor	M1	M2	M3
M2	0.7411	-	-
M3	0.8984	0.7411	-
M4	4.8e-05	4.8e-05	0.0001

O tempo computacional não se mostrou diferente na grande maioria das instâncias. O teste não rejeita a hipótese nula de que os t são iguais, tendo seu p-valor igual a $0,0632$. Como poucos ótimos foram encontrados, era esperado que não houvesse tal diferença.

5. Conclusão

Este artigo apresentou uma proposta de 3 adaptações de um modelo matemático para o MWNPP. Para a validação dessa proposta, realizou-se uma comparação de tempo, limite inferior

e limite superior encontrados pelos modelos matemáticos implementados no solver CPLEX. Os resultados obtidos foram testados com instâncias geradas aleatoriamente, tendo elementos uniformemente distribuídos. Os resultados demonstram que a eliminação das variáveis x_{ki} tem maior impacto sobre a qualidade da solução. Conclui-se que o método que mais reduz variáveis é o melhor.

Para reproduzir estes resultados basta gerar novas instâncias com características mais diversas e repetir o mesmo experimento estatístico. Caso o modelo matemático com menor número de variáveis não tenha, estatisticamente, as menores medidas de ub, o resultado estará falseado. Todo o material necessário para reprodução deste trabalho encontra-se no repositório Faria [2018][1].

As dificuldades encontradas neste trabalho foram a inadequação dos dados aos testes estatísticos paramétricos, o uso de memória *swap* pelo modelo 7. Como trabalhos futuros, tem-se a confecção dos modelos matemáticos integrando as ideias apresentadas neste artigo, totalizando 8 variantes. Também se faz necessária a reestruturação do experimento com uma maior diversificação de instâncias e tratamento das características das instâncias como um novo fator do teste estatístico para obter maiores detalhes sobre qual o comportamento das soluções entregues pelos modelos matemáticos.

Referências

Ausiello, G., Crescenzi, P., Gambosi, G., Kann, V., Marchetti-Spaccamela, A., e Protasi, M. (2003). *Complexity and approximation: Combinatorial optimization problems and their approximability properties*. Springer, corrected edition edition.

Benjamini, Y. e Hochberg, Y. (1995). Controlling the false discovery rate: A practical and powerful approach to multiple testing. *Journal of the Royal Statistical Society. Series B (Methodological)*, 57(1):289–300. ISSN 00359246.

Crescenzi, P., Kann, V., Halldórsson, M., Karpinski, M., e Woeginger, G. (1997). A compendium of NP optimization problems. URL: https://www.nada.kth.se/ viggo/problemlist/compendium.html.

Faria, A. (2018). Códigos usados no artigo análise de modelos matemáticos para o problema da múltipla partição de números. https://github.com/AlexandreFrias/AlgoritmosSBPO2018.

Faria, A. F., Souza, S. R., e Silva, C. A. (2017). Variable neighborhood descent applied to multi-way number partitioning problem. In *5th International Conference on Variable Neighborhood Search*, Ouro Preto, Brazil.

Faria, A. F., de Souza, S. R., Silva, C. A., e Filho, M. F. F. (2015). Um algoritmo iterativo para o problema da k-partição de números. In *Proceedings of the XXXVI Ibero-Latin American Congress on Computational Methods in Engineering*, volume 1.

Gent, I. P. e Walsh, T. (1998). Analysis of heuristics for number partitioning. *Computational Intelligence*, 14(3):430–451.

Graham, R. L. (1966). Bounds for certain multiprocessing anomalies. *The Bell System Technical Journal*, XLV(9):1563–1581.

Graham, R. L. (1969). Bounds on multiprocessing timing anomalies. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, 17(2):416–429.

Karmarkar, N. e Karp, R. M. (1982). The differencing method of set partition. Report UCB/CSD 81/113, Computer Science Division, University of California, Berkeley, CA.

[1] `https://github.com/AlexandreFrias/AlgoritmosSBPO2018`

Karp, R. M. (1972). Reducibility among combinatorial problems. In Miller, R. E., Thatcher, J. W., e Bohlinger, J. D., editors, *Proceedings of a Symposium on the Complexity of Computer Computations*, p. 85–103. Springer US.

Korf, R. E. (1998). A complete anytime algorithm for number partitioning. *Artificial Intelligence*, 106(2):181–203.

Korf, R. E. (2009). Multi-way number partitioning. In *IJCAI*, p. 538–543. Citeseer.

Korf, R. E., Schreiber, E. L., e Moffitt, M. D. (2013). Optimal sequential multi-way number partitioning. In *International Symposium on Artificial Intelligence and Mathematics (ISAIM-2014)*.

Korf, R. E. (2010). Objective functions for multi-way number partitioning. In *Third Annual Symposium on Combinatorial Search*.

Kruskal, W. H. e Wallis, W. A. (1952). Use of ranks in one-criterion variance analysis. *Journal of the American Statistical Association*, 47(260):583–621.

Michiels, W., Korst, J., Aarts, E., et al. (2003). Performance ratios for the karmarkar-karp differencing method. *Electronic Notes in Discrete Mathematics*, 13:71–75.

Moffitt, M. D. (2013). Search strategies for optimal multi-way number partitioning. In *Proceedings of the Twenty-Third international joint conference on Artificial Intelligence*, p. 623–629. AAAI Press.

Nijenhuis, A. e Wilf, H. S. (2014). *Combinatorial algorithms: for computers and calculators*. Elsevier.

Orlov, M. (2002). Efficient generation of set partitions. *Engineering and Computer Sciences, University of Ulm, Tech. Rep*.

Pedroso, J. P. e Kubo, M. (2010). Heuristics and exact methods for number partitioning. *European Journal of Operational Research*, 202(1):73–81.

R Core Team. *R: A Language and Environment for Statistical Computing*. R Foundation for Statistical Computing, Vienna, Austria, 2018. URL `https://www.R-project.org/`.

Schreiber, E. L. (2014). *Optimal Multi-Way Number Partitioning*. PhD thesis, University of California Los Angeles.

Schreiber, E. L. e Korf, R. E. (2014). Cached iterative weakening for optimal multi-way number partitioning. In *Proceedings of the Twenty-Eighth Annual Conference on Artificial Intelligence (AAAI-14) Quebec City, Canada*.

https://proceedings.science/p/85359?lang=pt-br