O Uso do Software R no estudo de Variáveis Aleatórias

Ruy Alves Guimarães Cotia
Departamento de Métodos Estatísticos, Universidade Federal do Rio de Janeiro
E-mail: ruy_cotia@hotmail.com

Gastão Coelho Gomes
Departamento de Métodos Estatísticos, Universidade Federal do Rio de Janeiro
E-mail: gastao@im.ufrj.br

Resumo: O objetivo deste trabalho é usar o R no estudo de variáveis aleatórias. Usaremos para este fim, os recursos de visualização gráfica que o R proporciona.

Abstract: The aim of this work is to use R in the study of random variables. We will use for this purpose the graphical visualization features that R provides.

1. Introdução:

Neste trabalho, refletiremos sobre as variáveis aleatórias (v.a.) e como elas se relacionam, utilizando o software R (**http://www.r-project.org**). O R é um pacote (gratuito) que oferece várias funções, já implementadas, dos mais variados métodos estatísticos. Além disso, é um ambiente de programação onde se pode usar o que de bom ele já contém para desenvolver novas implementações. Uma característica do R é a facilidade de se fazer gráficos com ótima qualidade.

O entendimento das distribuições de variáveis aleatórias aliado ao R se tornam potentes ferramentas para contribuir no estudo dos modelos usados na Pesquisa Operacional.

As variáveis aleatórias são classificadas conforme a natureza do conjunto de valores em números reais que elas podem assumir. Os dois tipos mais importantes de variáveis aleatórias são:

• Variáveis aleatórias discretas
• Variáveis aleatórias contínuas

Variável aleatória discreta:

Uma v.a. X é discreta se os valores (usualmente inteiros) que ela pode assumir pertencem a um conjunto enumerável. Frequentemente, os valores de uma variável aleatória discreta resultam de um processo de contagem.

Variável aleatória contínua:

Uma v.a. X é contínua se só tem probabilidade em intervalos. Usualmente, os valores de uma v.a. contínua são oriundos de uma medição.

1.1 O Caso Discreto

A cada variável aleatória discreta estão associadas duas funções: a função de probabilidade e a função de distribuição acumulada.

Uma função de probabilidade só assume valores não negativos. A soma de todos os valores de uma função de probabilidade é igual a 1.

https://proceedings.science/p/85327?lang=pt-br

A função de distribuição acumulada F(x) é uma função não decrescente e tende a zero quando x tende a $-\infty$. F(x) tende a 1 quando x tende a $+\infty$. O gráfico de F tem o aspecto de uma "função escada".

Esperança e variância de uma variável aleatória discreta:

1.1.1 Esperança: A esperança E(X) de uma variável aleatória discreta X é uma medida de centralidade, interpretada como uma média ponderada dos valores que X pode ter. Se X é uma variável aleatória discreta que assume os valores x_1, x_2, x_3, ... , x_N com probabilidades $p(x_1)$, $p(x_2)$, $p(x_3)$, ... , $p(x_N)$, respectivamente, então sua esperança é dada por:

$$E(X)=\sum_{i=1}^{N} x_i p(x_i).$$

1.1.2 Variância: A variância Var(X) de uma variável aleatória discreta X é uma medida de dispersão, usada para indicar o quanto os valores possíveis de X se distanciam da média. Se X é uma variável aleatória discreta que assume os valores x_1, x_2, x_3, ... , x_N com probabilidades $p(x_1)$, $p(x_2)$, $p(x_3)$, ... , $p(x_N)$, respectivamente, então sua variância é dada por:

$$Var(X)=\sum_{i=1}^{N} (x_i-\mu)^2 p(x_i)=E[(X-\mu)^2]=E[X^2]-(E[X])^2 .$$

1.2 O Caso Contínuo

Para cada variável aleatória contínua X existe uma função f, chamada função de densidade de X, tal que, para qualquer intervalo [a,b] a probabilidade de que um valor de X esteja entre a e b, P[a ≤ X ≤ b], é igual à área sob a curva que representa a função f entre as verticais, passando por a e por b, e acima do eixo horizontal.

Assim como no caso discreto, a cada modelo de variável aleatória contínua X corresponde também uma função de distribuição acumulada, F(x) = P[X ≤ x] = $\int_{-\infty}^{x} f(X)\,dX$, para todo x real.

Uma das propriedades principais da função de densidade f é que ela só assume valores não negativos. Outra propriedade importante diz que a área total sob a curva é igual a 1.

A função de distribuição acumulada F também tem propriedades interessantes. Vemos que à medida que x cresce, F(x) também varia continuamente entre 0 e 1. Além disso, F é uma função não decrescente. F(x) tende a 0 quando x tende a $-\infty$ e F(x) tende a 1 quando x tende a $+\infty$. Dessa forma temos que: P[a < X < b] = F(b) – F(a).

Esperança e variância de uma variável aleatória contínua:

1.2.1 Esperança: A esperança E(X) de uma variável aleatória contínua X, assim como nas discretas, é uma medida de centralidade e sua interpretação pode ser feita de modo análogo. Se X é uma variável aleatória contínua com função de densidade de probabilidade f(x), então sua esperança é dada por: $E(X)=\int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\,dx$.

1.2.2 Variância: A variância Var(X) de uma variável aleatória contínua X também é uma medida de dispersão e tem comportamento semelhante ao das discretas. A única diferença é que a soma é trocada por uma integral:

$$Var(X)=\int_{-\infty}^{\infty}(x_i-\mu)^2 f(x_i) E[(X-\mu)^2]=E[X^2]-(E[X])^2 \cdot$$

1.3 Função Geradora de Momentos

A função geradora de momentos $M_X(t)$ de uma variável aleatória X é definida, para todo t real, por:

$M_X(t)=E(e^{tX})=\sum_x e^{tX} p(x)$, para X discreto e função de probabilidade p(x)

$M_X(t)=E(e^{tX})=\int_{-\infty}^{\infty} e^{tX} f(x)\,dx$, para X contínua e função de densidade de probabilidade f(x).

A função geradora de momentos vai ser importante nesse estudo pelas seguintes propriedades:

1.3.1 - $\frac{d^n}{dt} M_X(t)=E(x^n)$

1.3.2 - Sejam X_i v.a. independentes e $Y = \sum_{i=1}^{n} X_i$, então $M_Y(t)=\prod_{i=1}^{n} M_{Xi}(t)$

1.3.3. - Sejam X e Y variáveis aleatórias. $M_X(t) = M_Y(t)$ se, e somente se, $X \equiv Y$, ou seja, a função geradora de momentos identifica de forma única uma variável aleatória.

2. Variáveis Aleatórias no R

Algumas variáveis aleatórias seguem padrões de comportamento em relação à sua distribuição de probabilidade. Tais padrões são denominados modelos probabilísticos. Estes são os modelos probabilísticos, disponíveis no R, que usaremos neste estudo.

Variáveis Aleatórias Discretas:
rbinom(n, size, prob) - Binomial
rpois(n, lambda) – Poisson
rhyper(nn, m, n, k) - Hipergeométrica

Variáveis Aleatórias Contínuas:
rnorm(n, mean=0, sd=1) - Normal (gaussiana)
rexp(n, rate=1) - Exponencial
rgamma(n, shape=1, rate, scale=1/rate) - Gama

Estas funções, definidas por r****, são usadas quando queremos gerar uma amostra aleatória de alguma distribuição.

Podemos substituir este ‘r’ por ‘p’, ‘q’ ou ‘d’ dependendo do nosso objetivo.

p**** - probabilidade acumulada no ponto x Ex: pnorm(x, mean, sd)
q**** - quantil correspondente à probabilidade acumulada p Ex: qnorm(p, mean, sd)
d**** - valor da densidade de probabilidade no ponto x Ex: dnorm(x, mean, sd)

Vale comentar que, quando trabalhamos com ‘p’ ou ‘q’, há um outro parâmetro importante: lower.tail = TRUE (default) para quando queremos $P(X \leq x)$ e lower.tail=FALSE para $P(X>x)$.

2.1 A variável aleatória de distribuição Binomial

Antes de falarmos da distribuição binomial, vamos entender o que são ensaios de Bernoulli. Eles consistem em experimentos em que só existem dois resultados possíveis, ou acontece algo com probabilidade p ou acontece seu complementar com probabilidade q=1-p.

Sua função de probabilidade é dada por:

$$p(x)=p^x q^{1-x}, se\ x=0,1 \qquad E(x)=p$$
$$p(x)=0\text{ , caso contrário} \qquad Var(x)=pq$$

Sejam n experimentos de Bernoulli X1, X2,…, Xn independentes e identicamente distribuídos dizemos que X = X1 + X2 + … + Xn terá distribuição Binomial com parâmetros n e p.
Sua função de probabilidade é dada por:

$$p(x)=\binom{n}{x} p^x q^{n-x}, se\ x=0,1,2,\ldots,n. \qquad E(x)=np$$
$$p(x)=0\text{ , caso contrário} \qquad Var(x)=npq$$

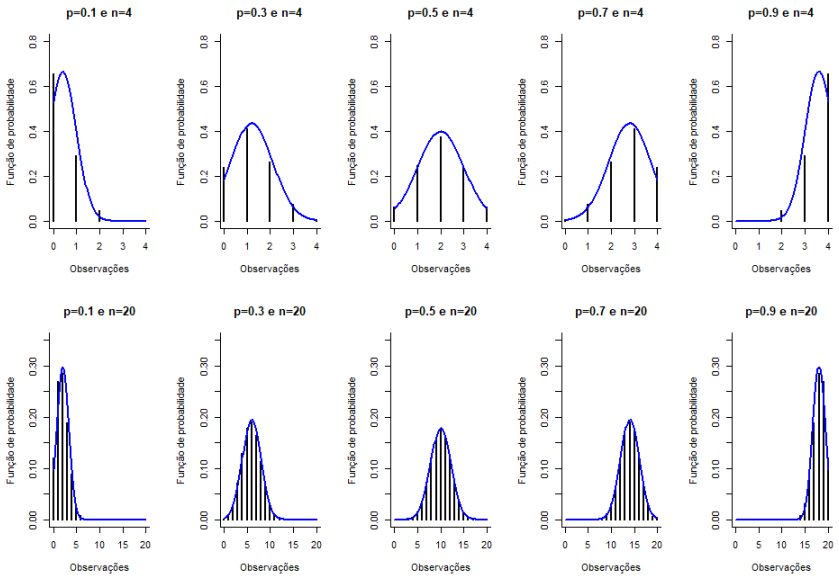
2.1.1 Gráficos da função de probabilidade da Binomial:

Para economizar espaço, escrevemos apenas os códigos da primeira linha da imagem. Os outros gráficos podem ser montados com comandos parecidos, fazendo as devidas alterações nos parâmetros diferentes. Todos os programas completos, usados neste texto, se encontram no link do Dropbox:

https://www.dropbox.com/sh/9xnfipxkvdlbyjb/AADm1oxyW2mcU7rW1UrDQKuKa?dl=0

```
x1=seq(0,4,1)
plot(x1,dbinom(0:4,4,0.1),type="h",lwd=2,ylim=c(0,.8),bty="l",main="p=0.1 e
n=4",xlab="Observações",ylab="Função de probabilidade")
curve(dnorm(x,4*.1,sqrt(4*.1*.9)),add=T,lwd=2,col="blue")
plot(x1,dbinom(0:4,4,0.3),type="h",lwd=2,ylim=c(0,.8),bty="l",main="p=0.3 e
n=4",xlab="Observações",ylab="Função de probabilidade")
curve(dnorm(x,4*.3,sqrt(4*.3*.7)),add=T,lwd=2,col="blue")
plot(x1,dbinom(0:4,4,0.5),type="h",lwd=2,ylim=c(0,.8),bty="l",main="p=0.5 e
n=4",xlab="Observações",ylab="Função de probabilidade")
curve(dnorm(x,4*.5,sqrt(4*.5*.5)),add=T,lwd=2,col="blue")
plot(x1,dbinom(0:4,4,0.7),type="h",lwd=2,ylim=c(0,.8),bty="l",main="p=0.7 e
n=4",xlab="Observações",ylab="Função de probabilidade")
curve(dnorm(x,4*.7,sqrt(4*.7*.3)),add=T,lwd=2,col="blue")
plot(x1,dbinom(0:4,4,0.9),type="h",lwd=2,ylim=c(0,.8),bty="l",main="p=0.9 e
n=4",xlab="Observações",ylab="Função de probabilidade")
curve(dnorm(x,4*.9,sqrt(4*.9*.1)),add=T,lwd=2,col="blue")
```

Figura 1: Visualização da Binomial comparada com a Normal para diferentes parâmetros.



Analisando estes gráficos podemos fazer algumas observações:

- Graças ao Teorema Central do Limite, vemos que quanto maior o valor de n, melhor fica a aproximação de X~Bin(n,p) pela X*~N(np,npq).
- Podemos ver que à medida que p se aproxima de 0.5, melhor fica o ajuste com a Normal.
- Sejam X~Bin(n,p) e Y~Bin(n,1-p), temos que P(x) = P(n-y). Como podemos observar nos gráficos quando p=0,1 e 0,9.

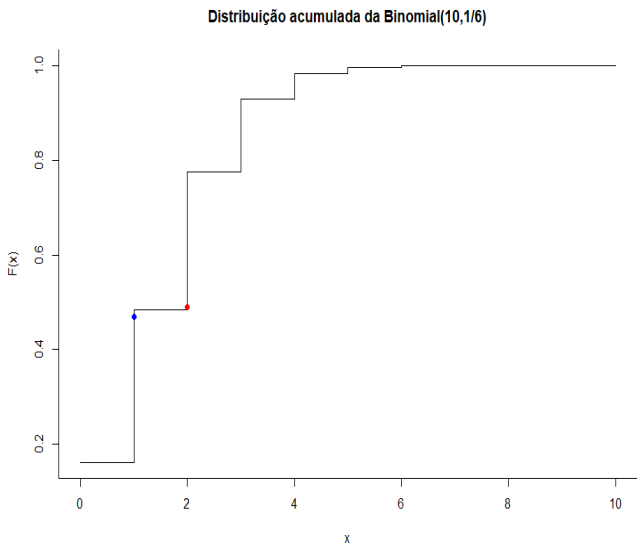
2.1.2 Exemplo de aplicação da distribuição Binomial:

Quando estamos interessados em saber o valor de x tal que $P(X \leqslant x) = 0.47$ e x' tal que $P(X \leqslant x') = 0.49$?

qbinom(0.47,10,1/6) gerando [1] 1
qbinom(0.49,10,1/6) gerando [1] 2

Isso acontece porque a função de distribuição acumulada tem o formato de escada.

Figura 2: Visualização da distribuição acumulada da Binomial.




```
Plot(0:10, pbinom(0:10,10,1/6),type="s",bty="l",main="Distribuição acumulada da Binomial(10,1/6)",xlab="x", ylab="F(x)")
points(x=1, y=0.47,col="blue",pch=16)
points(x=2, y=0.49,col="red",pch=16)
```

2.2 A variável aleatória de distribuição Poisson

Consideramos que X é uma variável aleatória Poisson com parâmetro λ (λ>0), se sua função de probabilidade for:

$$p(x)=\frac{e^{-\lambda}\lambda^{x}}{x!}, x=0,1,2\ldots. \qquad E(x)=\lambda$$

$$Var(x)=\lambda$$

Pode ser aplicada como sendo a probabilidade de, em um intervalo de tempo fixado, x eventos ocorrerem com uma taxa λ. Uma de suas vantagens é a possibilidade dela ser usada como uma aproximação da variável aleatória Binomial(n,p), com n grande e p suficientemente pequeno.

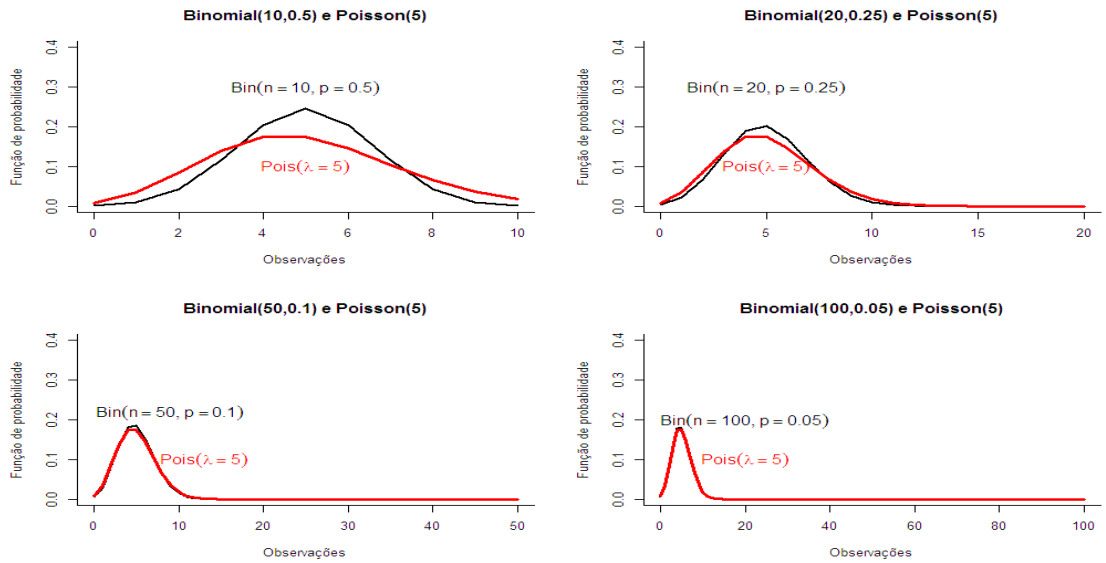
2.2.1 Gráficos da função de probabilidade da Poisson:

Vamos verificar que, de fato, quando n é grande e p é suficientemente pequeno a distribuição Binomial(n,p) pode ser bem aproximada pela Poisson(λ=np). Fixando o valor de λ em 5, vemos que quanto maior o n, melhor ficará a aproximação. Estas duas v.a. são discretas, optamos por uma representação que une as alturas das probabilidades para facilitar a comparação. Assim, quando a curva vermelha, correspondente a Poisson, que foi feita por último cobre a preta, nos casos de n=50 e n=100 a aproximação se dá de forma perfeita.

Por questão de espaço, estamos mostrando apenas os códigos do primeiro gráfico da imagem. Os outros podem ser feitos de forma análoga, trocando os valores dos parâmetros.

```
plot(x1,dbinom(x1,10,.5),type="l",lwd=2,bty="l", ylim=c(0,.4),main="Binomial(10,0.5) e Poisson(5)",xlab="Observações",ylab="Função de probabilidade")
lines(x1,dpois(x1,5),col="red",type="l")
text(5,.3,expression(Bin(paste(n)==10,paste(p)==0.5)),col="black",cex=1.2)
text(5,.1,expression(Pois(paste(lambda)==5)),col="red",cex=1.2)
```

Figura 3: Comparação das distribuições Binomial e Poisson.

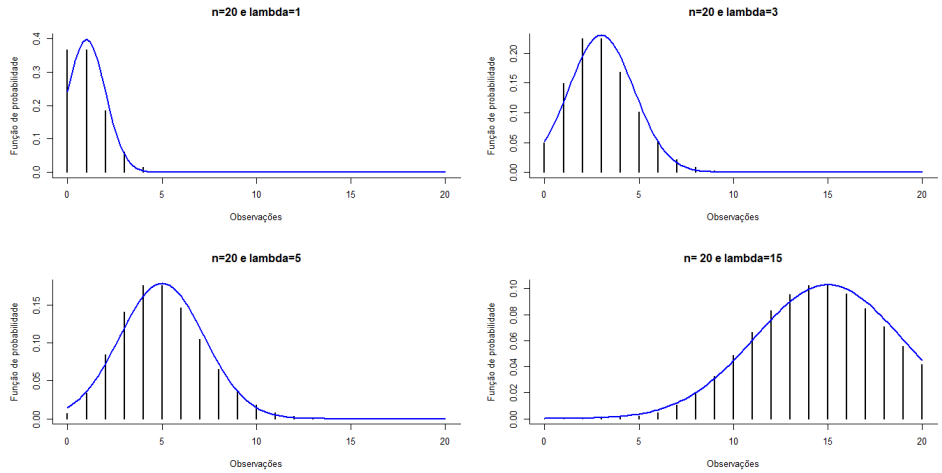


Nos gráficos abaixo veremos que a Poisson, assim como a Binomial, também pode ser bem aproximada pela distribuição Normal. Percebe-se que a aproximação começa a ficar mais precisa com λ>5. Novamente por questões de espaço, mostraremos o código do primeiro gráfico, os outros podem ser feito de forma análoga, apenas trocando os valores dos parâmetros.

```
par(mfrow=c(2,2))
```

```
x1=seq(0,20,1)
plot(x1,dpois(x1,1),type="h",lwd=2,bty="l", ylim=c(0,.4),main="n=20 e lambda=1",xlab="Observações",ylab="Função de probabilidade")
curve(dnorm(x,1,sqrt(1)),add=T,lwd=2,col="blue")
```

Figura 4: Comparação das distribuições Poisson e Normal.



2.2.2 Exemplo de aplicações da distribuição Poisson:

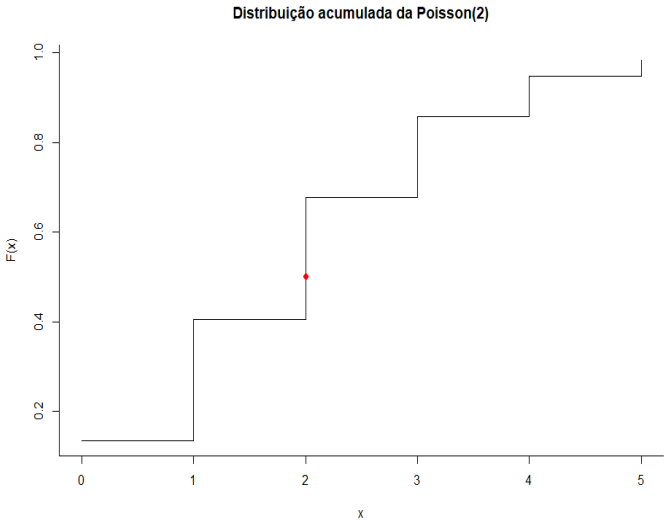
Considerando que X possa ser modelado por uma Poisson com λ=2, se estivermos interessados em saber o valor de x tal que $P(X \leqslant x) = 0.5$, podemos apenas utilizar:

```
qpois(0.5,2)
```

gerando

```
[1] 2
```

Figura 5: Visualização da distribuição acumulada da Poisson.




```
qpois(0.5,2)
Ppois(1,2, lower.tail=FALSE)
plot(0:5,ppois(0:5,2), type="s",bty="l",main="Distribuição acumulada da Poisson(2)",xlab="x", ylab="F(x)")
points(x=2,y=0.5, col="red",pch=16)
```

Perceba que o gráfico da função de distribuição acumulada F(x) da Poisson também tem forma de escada, podemos observar que o valor de x tal que $P(X \leqslant x) = 0.5$ realmente é 2, como indicado no gráfico.

2.3 A variável aleatória de distribuição Hipergeométrica

X é uma variável aleatória Hipergeométrica com parâmetros N, M e n, se sua função de probabilidade for:

$$p(x)=\frac{\binom{M}{k}\binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}}$$, onde k é inteiro e $max(0,n-(N-M))\leqslant k\leqslant min(M,n)$.

$$E(x)=\frac{nM}{N} \qquad Var(x)=\frac{nM}{N}\frac{(N-M)}{N}\left(1-\frac{n-1}{N-1}\right)$$

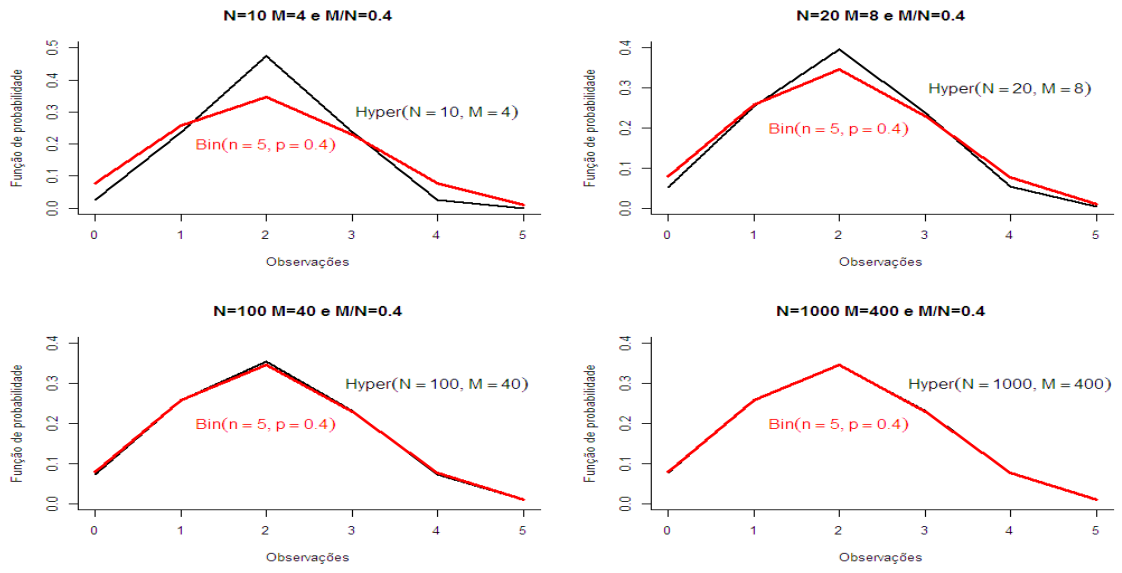
2.3.1 A relação entre a Hipergeométrica e a Binomial:

Quando a relação n/N é suficientemente pequena, a distribuição Hipergeométrica pode ser aproximada pela Binomial. Comparamos diferentes casos da Hipergeométrica (sempre mantendo a relação M/N=0.4) com a Binomial(5,0.4). Começamos com a Hiper(10,4) e vamos até a Hiper(1000,400), de acordo com os gráficos fica bem claro que quanto maior o valor de N melhor fica essa comparação:

*Novamente, por questões de espaço, omitiremos as linhas de código após o primeiro gráfico. Optamos, também, por uma representação que une as alturas das probabilidades

```
  par(mfrow=c(2,2))
  x1=seq(0,5,1)
  plot(x1,dhyper(x1,4,6,5),type="l",lwd=2,bty="l",
ylim=c(0,.5),main="N=10 M=4 e M/N=0.4",xlab="Observações",
ylab="Função de probabilidade")
  lines(x1,dbinom(x1,5,.4),col="red",type="l")
  text(2,.2,expression(Bin(paste(n)==5,paste(p)==0.4)),
col="red",cex=1.2)
  text(4,.3,expression(Hyper(paste(N)==10,paste(M)==4)),
col="black",cex=1.2)
```

Figura 6: Comparação das distribuições Binomial e Hipergeométrica.



2.4 A variável aleatória de distribuição Normal

Consideramos que X é uma variável aleatória normal com parâmetros μ e σ² se sua função de densidade for:

$$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{\frac{-(x-\mu)^2}{(2\sigma^2)}},\ -\infty<x<\infty \qquad E(x)=\mu$$

$$Var(x)=\sigma^2$$

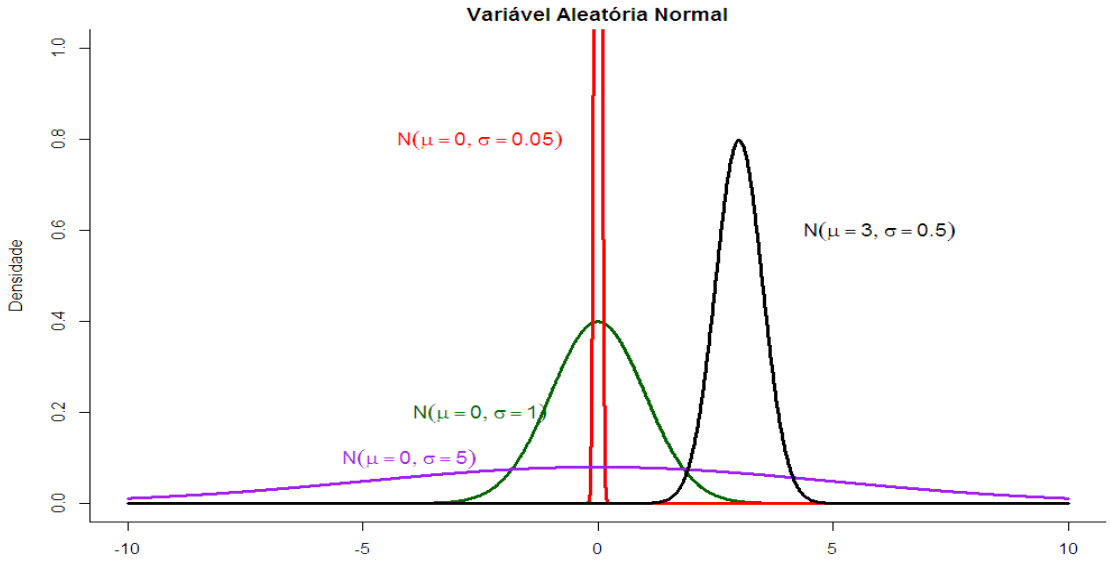
É uma distribuição bastante popular dada sua vasta quantidade de aplicações, entre elas em física, finanças, antropologia e outras.

2.4.1 Gráficos da função de probabilidade da Normal:

Vale ressaltar que na função dnorm o terceiro parâmetro é o desvio padrão.

```
x=seq(-10,10,0.01)
plot(x,dnorm(x,0,1),type="l",ylim=c(0,1),main="Variável Aleatória
Normal",xlab="Valores de x",ylab="Densidade",bty="l",col="darkgreen",lwd=3)
lines(x,dnorm(x,0,.05),col="red",lwd=3)
lines(x,dnorm(x,0,5),col="purple",lwd=3)
lines(x,dnorm(x,3,.5),col="black",lwd=3)
text(-2.5,.2,expression(N(paste(mu)==0,paste(sigma)==1)),col="darkgreen",cex=1.2)
text(-2.5,.8,expression(N(paste(mu)==0,paste(sigma)==0.05)),col="red",cex=1.2)
text(-4,.1,expression(N(paste(mu)==0,paste(sigma)==5)),col="purple",cex=1.2)
text(6,.6,expression(N(paste(mu)==3,paste(sigma)==0.5)),col="black",cex=1.2)
```

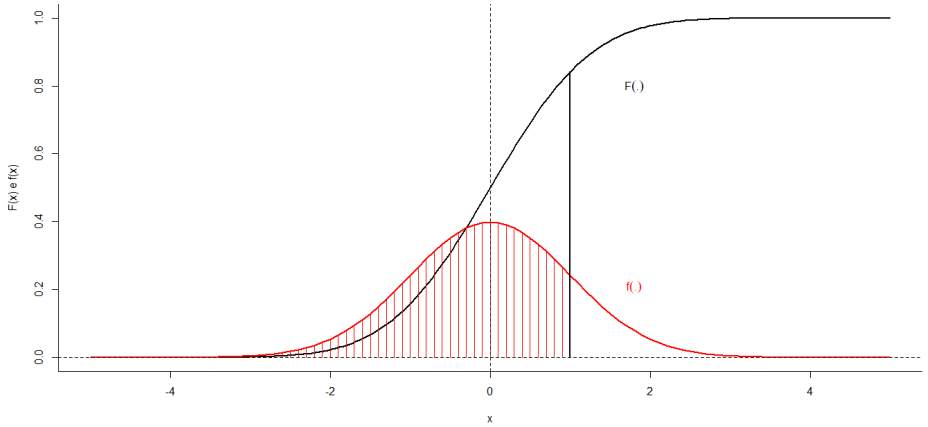
Figura 7: Comparação das distribuições Normais com diferentes parâmetros.



No gráfico abaixo vamos gerar uma curva preta, representando a função f(x) de densidade de probabilidade e uma curva vermelha, representando a função F(x) de distribuição acumulada:

```
curve(pnorm(x),-5,5,lwd=2, n=200, bty="l",ylab="F(x) e f(x)")
curve(dnorm(x),-5,5,lwd=2, col="red", add=T)
text(1.8,.8, expression(paste(F)(.)))
text(1.8,.21, expression(paste (f)(.)), col="red")
for (i in seq(-3,1,.1))  segments(i,0, i, dnorm(i), col="red")
        segments(1,0,1,pnorm(1), lwd=2)
abline(v=0, h=0, lty=2)
```

Figura 8: Comparação das distribuições Normais Acumulada e Densidade.



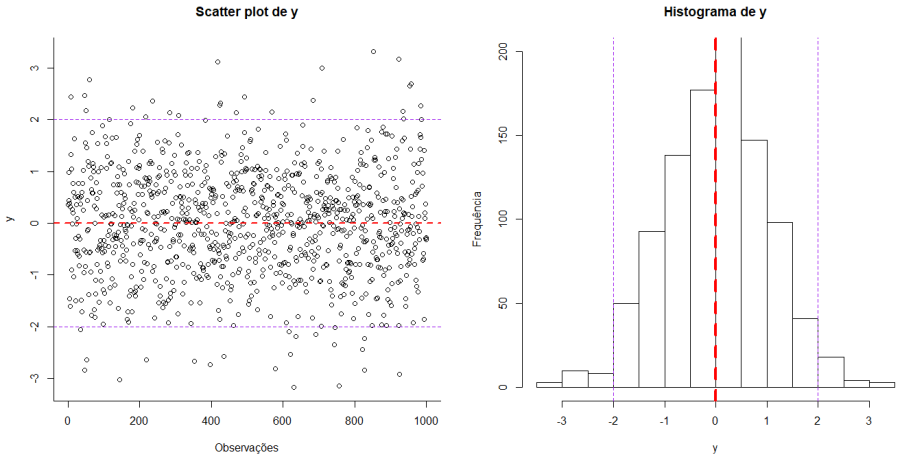
Percebe-se que a área hachurada em vermelho é exatamente igual à altura correspondente em F(x). Por definição, a função de distribuição acumulada F(x) é igual a $P[X \leq x] = \int_{-\infty}^{X} f(X)\,dX$.

2.4.2 Gerando uma amostra da Normal no R:

Se estivermos interessados em gerar uma amostra aleatória de distribuição normal usamos o seguinte comando.

```
y=rnorm(n=1000,0,1)
par(mfrow=c(1,2))
plot(y,xlab="Observações",ylab="y",main="Scatter plot de y",bty="l")
abline(h=-2, lty=2,col="purple"); abline(h=0, lty=2, col="red", lwd=2); abline(h=2, lty=2,col="purple")
hist(y,main="Histograma de y", ylab="Frequência",ylim=c(0,200))
abline(v=-2, lty=2,col="purple"); abline(v=0, lty=2, col="red", lwd=4); abline(v=2, lty=2,col="purple")
```

Figura 9: Gerando Amostra Aleatória da distribuição Normal com Histograma.



Neste caso, temos uma amostra aleatória de 1000 observações com distribuição normal de média 0 e desvio padrão 1. A linha tracejada vermelha representa a média teórica e as linhas tracejadas roxas representam a distância de 2 desvios padrões para mais e para menos com relação à média.

2.5 A variável aleatória de distribuição Gama

Uma variável aleatória tem distribuição Gama com parâmetros α e β, α>0 e β >0, se tiver a seguinte função de densidade:

$$f(x)=\frac{\beta^{\alpha}x^{\alpha-1}e^{-\beta x}}{\Gamma(\alpha)},\ x\geqslant 0 \qquad E(x)=\frac{\alpha}{\beta}$$

$$f(x)=0,\ x<0 \qquad Var(x)=\frac{\alpha}{\beta^{2}}$$

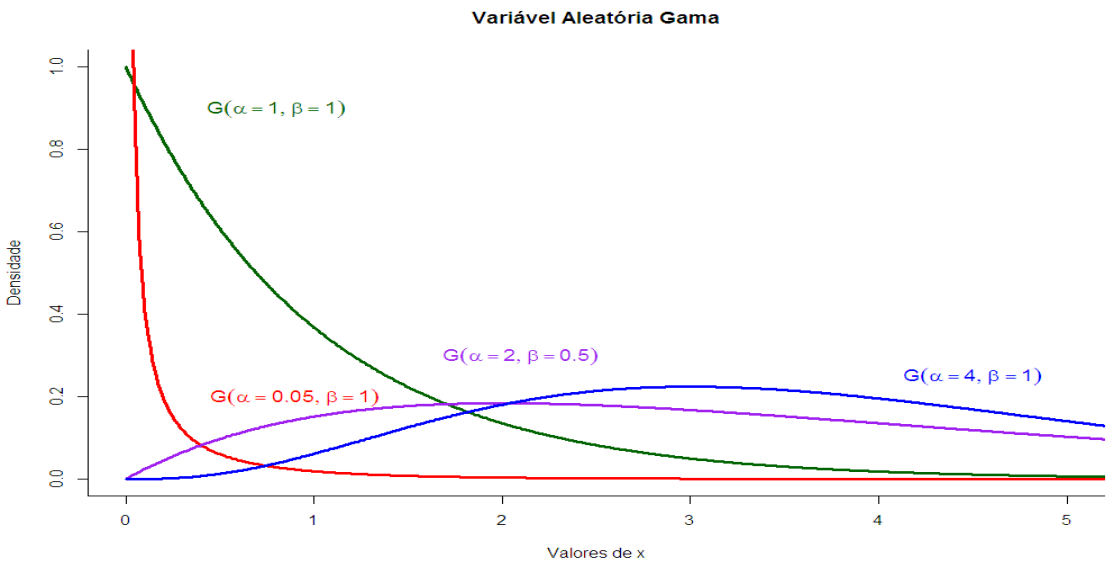
Sendo a função Γ(α) definida por $\int_0^{\infty} x^{\alpha-1}e^{-x}dx$

2.5.1 Gráficos da função de probabilidade da Gama:

No R, geramos uma sequência de valores x de 0 a 10, incrementando sempre 0.01 unidades. Dessa forma, podemos avaliar o comportamento da distribuição Gama para diferentes valores de α e β.

```
x=seq(0,10,0.01)
plot(x,dgamma(x,1,1),type="l",xlim=c(0,5),main="Variável Aleatória
Gama",ylim=c(0,1),xlab="Valores de x",ylab="Densidade",bty="l",col="darkgreen",lwd=3)
lines(x,dgamma(x,0.05,1),col="red",lwd=3)
lines(x,dgamma(x,2,.5),col="purple",lwd=3)
lines(x,dgamma(x,4,1),col="blue",lwd=3)
text(.8,.9,expression(G(paste(alpha)==1,paste(beta)==1)),col="darkgreen",cex=1.2)
text(.9,.2,expression(G(paste(alpha)==0.05,paste(beta)==1)),col="red",cex=1.2)
text(2.1,.3,expression(G(paste(alpha)==2,paste(beta)==.5)),col="purple",cex=1.2)
text(4.5,.25,expression(G(paste(alpha)==4,paste(beta)==1)),col="blue",cex=1.2)
```

Figura 10: Comparação das distribuições Gamas com diferentes parâmetros.



Podemos observar que se $0<\alpha\leqslant 1$, então f é monotonamente decrescente. Quando α>1, a função é crescente até um ponto e depois começa a decrescer.

2.5.2 Relação entre Gama e Exponencial:

Uma das propriedades desta distribuição é a seguinte:

Considere que X~Gama(1,β), portanto:

$$f(x)=\frac{\beta^1 x^0 e^{-\beta x}}{\Gamma(1)}=\beta e^{-\beta x}, x \geqslant 0$$

$$f(x)=0 \text{ , } x<0$$

Ou seja, a distribuição Exponencial de parâmetro β é um caso particular da distribuição Gama.

Essa relação entre Exponenciais e Gamas vai além, vamos ver na demonstração abaixo que a soma de variáveis aleatórias exponenciais independentes e identicamente distribuídas será Gama.

Demonstração: Sejam X_i, i= 1,2,…,n variáveis aleatórias Gama com parâmetros (1,β) temos a seguinte função geradora de momentos:

$$M_k(t)=\left(\frac{\beta}{\beta-t}\right)^1 \text{ , para } t < \beta$$

$$M(t) = \prod_{k=1}^{n} M_k(t)=\left(\frac{\beta}{\beta-t}\right)^{1+1+\ldots+1} \text{ , para } t < \beta$$

Essa $M(t)=\left(\frac{\beta}{\beta-t}\right)^n$ pode ser reconhecida como a função geradora de momentos da distribuição Gama de parâmetros (n,β), portanto a soma de n variáveis aleatórias Exp(β) terá distribuição Gama(n,β). Uma outra curiosidade é que esta função também é geradora de momentos da distribuição Erlang (que é um caso particular da Gama, quando n é inteiro).

3. Conclusão:

O software R se mostrou bastante eficiente nos cálculos, tanto de probabilidades quanto de quantis, e simulação dos vários modelos de variáveis aleatórias. Usamos também o cálculo das densidades, que associado a elaboração de gráficos, nos ajudou a comparar e examinar a interdependência entre os vários modelos.

Poderíamos estender nosso estudo, se não fosse a limitação física do artigo, para várias outras situações, como: simulação do teorema central do limite, as distribuições geradas da Normal: Qui-Quadrado, F-Snedecor, t-Student, entre outros.

O entendimento das distribuições de variáveis aleatórias contribui nos modelos usados na Pesquisa Operacional e o R é um significativo elemento neste contexto.

4. Referências:

1. ROSS, S; **A first course in Probability**, Pearson; 2010.
2. DE GROOT, M. H; SCHERVISH M. J. **Probability and Statistics,** Addison-Wesley; 2011.
3. PINHEIRO, J. I. D.; CARVAJAL, S. S. R.; CUNHA, S. B.; GOMES. G. C.;. **Estatistica básica – A arte de trabalhar com dados,** Elsevier; 2015.
4. GOMES. G. C.;, PINHEIRO, J. I. D.; CARVAJAL, S. S. R.; CUNHA, S. B., **O software R como instrumento de ensino em Estatística Básica,** Minicurso do SBPO 2010, http://www.din.uem.br/sbpo/sbpo2010/mc/idx00.htm
5. https://stat.ethz.ch/R-manual/
6. PINHEIRO, J. I. D.; CARVAJAL, S. S. R.; CUNHA, S. B.; GOMES. G. C.; **Probabilidade e Estatística: quantificando a incerteza;** Editora Campus, 2012.
7. KABACOFF, R.; **R in Action, Data Analysis and Graphics with R**; Manning Publications Co., 2011.