O PROBLEMA DA p-HUB MEDIANA COM INTERDIÇÕES

Hugo Quadros
Pós Graduação em Engenharia de Produção - Universidade Federal Fluminense
hugo.quadros2@gmail.com

Marcos Costa Roboredo
Departamento de Engenharia de Produção - Universidade Federal Fluminense
mcroboredo@id.uff.br

Artur Alves Pessoa
Departamento de Engenharia de Produção - Universidade Federal Fluminense
artur@producao.uff.br

Valdecy Pereira
Departamento de Engenharia de Produção - Universidade Federal Fluminense
valdecy.pereira@gmail.com

RESUMO

Hubs são muito utilizados em sistemas de transporte, atuando principalmente como transbordo e pontos de troca. Hubs estão sujeitos a interdições de sua funcionalidade, que levam a um aumento considerável no custo total de atendimento. Para mitigar o impacto causado pelas interdições, o planejador do sistema pode considerá-las no momento em que decide onde os hubs devem ser localizados. Surge então o problema da p-hub mediana com interdições (PHMI), que consiste em decidir onde p hubs devem ser localizados sabendo que r destes serão intencionalmente interditados. A decisão de localização é tomada de modo a minimizar o custo total de atendimento após a interdições. Para este problema, propomos pela primeira vez um método exato, baseado em um algoritmo *branch-and-cut*. Apresentamos diversos experimentos, comparando o método proposto a um método de enumeração exaustiva, onde podemos comprovar que o método proposto requer menos tempo computacional especialmente para as instâncias médias e grandes.

PALAVRAS CHAVE. Otimização em dois níveis, *Branch-and-cut*, localização e interdição de hubs.

Otimização Combinatória

ABSTRACT

Hubs are widely used in transportation systems, acting mainly as transshipment and switching points, being used to concentrate and consolidate flows. Hubs are subject to an interdiction of its total functionality. Interdictions result in an efficiency loss to the system, substantially increasing the distribution cost. To mitigate the impact caused by interdictions, interdictions scenarios can be considered during the network design decision. In this context, the p-hub median problem with interdictions arises. This problem consists of deciding where p hubs have to be located knowing r of them will be intentionally interdicted. The location decision is made in order to minimize the total cost after the interdictions. For this problem, we are proposing an exact method, based on a branch-and-cut algorithm. We present several experiments, comparying our method win an exhaustive enumeration algorithm, where we comprove our method requires less computational time especially for the medium and large instances.

KEYWORDS. Bilevel Optimization, Branch-and-cut, interdiction of hubs.

Combinatorial Optimization

https://proceedings.science/p/85319?lang=pt-br

1. Introdução

Hubs são facilidades especiais que atuam principalmente como pontos de transbordo e de troca em sistemas de transporte de produtos ou dados onde é necessário transferir fluxos entre diversos pares origem e destino (O-D). Por agregar diferentes fluxos, associados a diferentes pares O-D, as rotas entre hubs são mais consolidadas e, portanto, existe um desconto no transporte destas rotas quando comparadas a caminhos que ligam a origem ao destino diretamente. Além disso, o transporte entre hubs reduz o número de possíveis rotas durante o transporte, diminuindo assim possíveis perdas. Este modelo de transporte é muito aplicado em linhas aéreas [Button, 2002], sistemas logísticos [Ishfaq e Sox, 2011] e redes de telecomunicações [Kim e O'Kelly, 2009].

O funcionamento de um hub em uma rede de distribuição de fluxos está sujeito a interdição total ou parcial de suas funcionalidades. As razões para tal acontecimento são várias, como por exemplo falhas operacionais, desastres naturais ou até mesmo ataques intencionais. Se um hub for totalmente interditado, todos os fluxos que o utilizavam como intermediário deverão ser realocados. Levando em consideração o fato de hubs consolidarem e concentrarem os fluxos de diferentes pares O-D, interdições em hubs tendem a gerar um grande aumento no custo total de distribuição.

Para mitigar o impacto das interdições, o planejador do sistema pode levar em consideração eventuais cenários de interdição no momento em que decide onde os hubs devem ser localizados. Neste contexto, surge o problema da p-hub mediana sujeito a interdições (PHMI), que consiste em decidir onde p hubs devem ser localizados sabendo que em seguida r destes serão interditados. É assumido no problema que as r interdições são feitas com o objetivo de causar o maior aumento possível no custo total de atendimento, que é dado pela soma dos custos de atendimento de cada par O-D.

Ghaffarinasab e Atayi [2017] propuseram o PHMI e trouxeram algumas contribuições para o problema, onde podemos destacar: a proposição de uma formulação de otimização em dois níveis e uma metaheurística baseada em arreficimento simulado para o mesmo.

Neste trabalho, apresentamos pela primeira vez uma formulação linear de um único nível e um método exato para o PHMI. Inicialmente, propomos a formulação que possui um número polinomial de variáveis e um número exponencial de restrições. Em seguida, provamos que a formulação é válida e também propomos uma maneira de fortalecer a formulação. Para resolver a formulação de maneira eficiente, o método aqui proposto gera as restrições sob demanda durante um algoritmo *branch-and-cut*. Apresentamos ainda diversos experimentos computacionais, comparando o método proposto a um método de enumeração exaustiva, onde é possível comprovar que o método proposto requer menos tempo computacional especialmente para as instâncias médias e grandes.

2. Revisão de Literatura

2.1. Interdição intencional de facilidades em redes de abastecimento

O assunto de interdição em redes é sob a visão do interditor e foi primeiramente abordado em aplicações militares durante períodos de guerra, onde podemos ver em McMasters e Mustin [1970] e Ghare et al. [1971]. McMasters e Mustin [1970], por exemplo, considerando uma rede de suprimentos de guerra, tinha como principal objetivo interditar links planejando interromper o movimento inimigo e/ou a chegada de seus suprimentos como comida, remédios ou munição para o combate.

Church et al. [2004] foram os primeiros autores a propor problemas de interdição em redes de abastecimento onde pontos de demanda são atendidas por facilidades. Especificamente, dois problemas foram propostos pelos autores: o problema da r-interdicação em uma rede mediana (RIM) e o problema da r-interdicação em uma rede de Cobertura (RIC). Ambos os problemas visam identificar o subconjunto de r facilidades que, caso fossem totalmente interditadas, acarretariam em um impacto máximo no sistema. A diferença está na forma do cálculo deste impacto. No RIM, o pretende-se a maximização da soma dos custos de atendimento de cada ponto de demanda enquanto

https://proceedings.science/p/85319?lang=pt-br

no RIC pretende-se minimizar a demanda coberta. A partir deste trabalho, diversas variantes e novos problemas surgiram nesta área [Losada et al., 2012; Aksen et al., 2014; Zhang et al., 2016].

No melhor do nosso conhecimento, Lei [2013] foi o primeiro trabalho a aplicar o conceito de interdição em uma rede *hub-and-spoke* e isto abriu um novo campo para estudos futuros. Os autores propuseram o Problema da Mediana com r-Interdições em Hubs (*"r-Hub Interdiction Median Problem - RHIM"*) que consiste em achar um subconjunto de r hubs a serem interditados em uma rede *hub-and-spoke* de múltipla alocação que causem o maior aumento possível no custo total de distribuição do sistema. Para a resolução deste problema, os autores propuseram um modelo de programação linear inteira. Quadros et al. [2018] revisitaram o problema e mostraram que a formulação proposta em Lei [2013] pode ser mais lenta que um algoritmo de enumeração exaustiva quando o número de pares O-D é alto. Os autores propuseram ainda uma heurística gulosa para o problema.

2.2. Decisões preventivas

Com o aumento do número de trabalhos voltados para a interdição de facilidades, surgem trabalhos que visam estudar possíveis decisões preventivas que o planejador do sistema pode tomar com o intuito de minimizar o impacto de futuras interrupções intencionais. Neste contexto, duas decisões se popularizaram: a de localização e a de fortificação de facilidades. Na decisão de localização, o planejador do sistema ao tomar a decisão de onde devem ser instaladas as facilidades, considera futuras interdições intencionais. Já na decisão de fortificação, o planejador do sistema gasta um recurso limitado para proteger (fortificar) as facilidades mais críticas visando reduzir o impacto de intencionais interdições no sistema. Ambos os problemas são de difícil resolução uma vez que geralmente recaem em um modelo de otimização em dois níveis com variáveis inteiras.

No problema abordado neste trabalho, a decisão preventiva é a de localização. Portanto, o enfoque da revisão de literatura será neste tema. O'Hanley e Church [2011] propôs um modelo de localização de p facilidades em uma rede de cobertura que considerava dois cenários, com diferentes probabilidades após a decisão de localização: um onde nenhuma interdição ocorre e outro onde r intencionais interdições ocorrem. O modelo visava então maximizar a demanda total coberta esperada dados estes dois cenários. Para resolver este problema de maneira exata, os autores propuseram um algoritmo de decomposição baseado em desigualdades super válidas. Aksen e Aras [2012] e Aksen et al. [2013] lidaram com problemas onde o planejador do sistema pode tanto localizar quanto fortificar facilidades em uma rede mediana visando minimizar o impacto de futuras interdições intencionais. Os problemas possuem similaridades mas não são os mesmos. Além disso, ambos os trabalhos resolvem os problemas através de heurísticas.

Para redes *hub-and-spoke*, Parvaresh et al. [2013] propuseram um problema onde o planejador do sistema deve decidir onde localizar p hubs de modo a minimizar o custo total esperado de distribuição considerando diversos cenários de intencionais interdições em hubs com diferentes probabilidades. Para resolver o problema, os autores propuseram uma metaheurística de arreficimento simulado. Ghaffarinasab e Atayi [2017] revisitaram este problema para o caso particular onde um único cenário com r interdições acontece. Como já mencionado anteriormente, este problema é o mesmo que o abordado neste trabalho e é conhecido como problema da p-hub mediana com interdições (PHMI). Além do PHMI, os autores propuseram ainda mais dois problemas similares: um onde o objetivo é maximizar o total de fluxo coberto após r interdições e outro onde o objetivo é minimizar o maior custo de atendimento de algum par O-D, ambos também resolvidos através de uma metaheurística de arreficimento simulado.

3. Descrição do PHMI

O PHMI considera um sistema de transporte composto de um conjunto pontos J e um subconjunto $H \subseteq J$ contendo potenciais hubs. O planejador do sistema deve localizar p hubs. Após esta localização, a demanda w_{ij} de cada par de pontos $(i, j) \in J \times J$ é transportada do ponto i para o ponto j utilizando-se de um único hub ou um par de hubs localizados de acordo com o

https://proceedings.science/p/85319?lang=pt-br

custo de atendimento. O custo de um par de pontos $(i, j) \in J \times J$ a ser atendido pelo par de hubs $(k, m) \in H \times H$ é denotado por c_{ijkm} e é dado por

$$c_{ijkm} = min\left\{d_{ik} + \alpha d_{km} + d_{mj}, d_{im} + \alpha d_{mk} + d_{kj}\right\}, \tag{1}$$

onde a matriz d é composta pelas distâncias entres os pontos e $\alpha \in [0, 1]$ representa o fator de desconto entre hubs. Quando $k = m$, tem-se o custo de transporte utilizando-se um único hub. Neste caso, o custo é dado por

$$c_{ijkk} = d_{ik} + d_{kj}. \tag{2}$$

Existe ainda a possibilidade de um ou mais hubs localizados serem interditados e, neste caso, todos os pares $(i, j) \in J \times J$ que eram atendidos de alguma forma por um hub interditado passam a ser atendidos por outro hub ou par de hubs não interditado mais barato, aumentando o custo total de atendimento (soma dos custos de atendimento de cada par de pontos).

O objetivo do PHMI é identificar a estratégia de localização de p hubs que minimiza o custo total de atendimento sabendo que r destes hubs localizados serão interditados com o objetivo de causar o maior impacto neste custo.

4. Formulação para o PHMI

Nesta Seção é apresentada uma formulação de Programação Linear Inteira (PLI) para o PHMI. Para isso, seja $\mathscr{L}$ o conjunto de todas as estratégias possíveis de localização. Matematicamente, $\mathscr{L} = \{L \subseteq H || L| = p\}$. Similarmente, para cada estratégia de localização $L \in \mathscr{L}$, define-se o conjunto de possíveis interdições $\mathscr{I}(L) = \{I \subseteq L || I| = r\}$. Para cada $L \in \mathscr{L}$, cada $I \in \mathscr{I}(L)$ e cada par de pontos $(i, j) \in J \times J$, define-se $C_{ij}(L, I)$ como custo total de atendimento do par O-D (i, j) dadas as estratégias L e I. Matematicamente, $C_{ij}(L, I)$ é dado por:

$$C_{ij}(L, I) = w_{ij} \min_{l,m \in L \setminus I} \{c_{ijlm}\} \tag{3}$$

Em outras palavras, o par O-D (i, j) será servido pelo hub ou par de hubs não interditado mais barato. Neste contexto, o custo total de atendimento $C(L, I)$ é dado por

$$C(L, I) = \sum_{i \in J} \sum_{j \in J} w_{ij} C_{ij}(L, I). \tag{4}$$

Para a nossa formulação, definimos as seguintes variáveis:

z - custo total de transporte após as localizações e interdições

$$x_h = \begin{cases} 1 & \text{se o hub } h \text{ é fortificado} \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

A formulação para o PHMI é a que segue.

$$\min z \tag{5}$$

$$\text{s.a.} \sum_{h \in H} x_h = p \tag{6}$$

$$z \geq C(L, I) - \sum_{h \notin L} M_h(L, I) x_h, \quad \forall L \in \mathscr{L}, I \in \mathscr{I}(L) \tag{7}$$

$$x_h \in \{0, 1\}, \quad \forall h \in H \tag{8}$$

$$z \geq 0 \tag{9}$$

https://proceedings.science/p/85319?lang=pt-br

onde $M_h(L, I)$ representa um limite superior para o ganho de se trocar a estratégia atual L por uma qualquer que contenha h. Neste trabalho, vamos discutir e propor duas maneiras de se obter tal limite.

A função objetivo (5) minimiza o custo de transporte após as localizações e interdições. A restrição (6) garante que p hubs devem ser localizados. As restrições (7) garantem, para cada par de estratégias de localização e interdição L e I, que a variável z seja maior ou igual ao custo de transporte, dadas as estratégias L e I menos um número muito grande, representado por $M_h(L, I)$, que só terá efeito quando o x_h for igual 1, para algum h não localizado. As restrições (8) garantem que as variáveis x sejam binárias e a restrição (9) garante que z seja não negativo. Na seção 5, propomos duas maneiras diferentes de se obter o limite superior $M_h(L, I)$, provando que a formulação (5) - (9) é válida para quando utilizamos qualquer uma destas.

5. Cálculo de $M_h(L, I)$

Nesta seção, apresentamos duas maneiras de calcular $M_h(L, I)$. A primeira delas, denotada por $M_h^{'}(L, I)$, é intuitiva e representada através da equação:

$$M_h^{'}(L, I) = \sum_{i \in J} \sum_{j \in J} w_{ij} \max \left\{ 0, \min_{l,m \in L \setminus I} \{c_{ijlm}\} - \min_{\substack{l,m \in H \setminus I \\ h \in \{l,m\}}} \{c_{ijlm}\} \right\}. \tag{10}$$

Podemos observar que na equação (10), temos o somatório, para cada par O-D, da diferença entre o custo de atendimento atual e o custo de atendimento usando h de alguma forma. Esta diferença só é incluída na soma, caso esta seja positiva. A grande fraqueza de utilizarmos $M_h(L, I) = M_h^{'}(L, I)$ é o fato de que, para um determinado par O-D $(i, j) \in J \times J$, podem existir dois hubs diferentes l_1 e m_1 não pertencentes a L tais que

$$c_{ijl_1m_1} = \min_{l,m \in H \setminus I} \{c_{ijlm}\},$$

onde neste caso o limite superior para o ganho de se incluir l_1 é o mesmo para o de se incluir m_1. Tal ganho é contabilizado duas vezes, enquanto na verdade só precisaria ser contabilizado uma única vez. Neste contexto, propomos uma segunda maneira de calcular $M_h(L, I)$ denotada por $M_h^{''}(L, I)$ que divide por dois toda vez que este problema acontece. A representação matemática de $M_h^{''}(L, I)$ é dada por

$$M_h^{''}(L, I) = \sum_{i \in J} \sum_{j \in J} w_{ij} \times A, \tag{11}$$

onde

$$A = \max \left\{ 0, \min_{l,m \in L \setminus I} \{c_{ijlm}\} - \min_{\substack{l,m \in H \setminus I \\ h=l \wedge m \in L \\ h=m \wedge l \in L}} \{c_{ijlm}\}, 0,5 \times \left(\min_{l,m \in L \setminus I} \{c_{ijlm}\} - \min_{\substack{l,m \in H \setminus L \\ (h=l \vee h=m) \wedge l \neq m}} \{c_{ijlm}\} \right) \right\}.$$

Provamos agora a validade da desigualdade (7) quando utilizamos $M_h(L, I) = M_h^{'}(L, I)$ ou quando utilizamos $M_h(L, I) = M_h^{''}(L, I)$. Em outras palavras, é provado aqui que nenhuma solução inteira viável será cortada. Os detalhes de tal prova se encontram na proposição 1.

Proposição 1. *A desigualdade* (7) *é válida quando utilizamos* $M_h(L, I) = M_h^{'}(L, I)$ *ou* $M_h(L, I) = M_h^{''}(L, I)$.

https://proceedings.science/p/85319?lang=pt-br

Demonstração. Dada uma solução viável $(\overline{z}, \overline{x})$. Definimos $\overline{L} = \{h \in H | \overline{x}_h = 1\}$. Assim:

$$\overline{z} = \max_{I \in \mathscr{I}} \left\{ C(\overline{L}, I) \right\} \tag{12}$$

Devemos mostrar que

$$\overline{z} \geq \ C(L, I) - \sum_{h \notin L} M_h(L, I) x_h \quad \forall L \in \mathscr{L}, \forall I \in \mathscr{I}(L),$$

quando $M_h(L, I) = M_h^{'}(L, I)$ ou $M_h(L, I) = M_h^{''}(L, I)$. Para isso, sejam $\overline{I}$ o argumento que gera o máximo em (12), $L \in \mathscr{L}$ e $I \in \mathscr{I}(L)$ quaisquer. Definimos ainda J_h como um conjunto de pares $(i, j) \in J \times J$ tais que o hub $h \in \overline{L} \setminus L$ usado por (i, j) no cálculo de $\overline{z}$. Notemos que

$$\overline{z} = C(\overline{L}, \overline{I}) \geq C(\overline{L}, I) = \sum_{i \in J} \sum_{j \in J} w_{ij} \min_{l,m \in \overline{L} \setminus I} \{c_{ijlm}\}$$

$$\geq \ C(L, I) - \sum_{h \in \overline{L} \setminus L} \sum_{(i,j) \in J_h} w_{ij} \times A \geq$$

$$\geq \ C(L, I) - \sum_{h \notin L} M_h^{''}(L, I) x_h$$

$$\geq \ C(L, I) - \sum_{h \notin L} M_h^{'}(L, I) x_h$$

A primeira desigualdade é válida porque $\overline{I}$ é uma estratégia ótima se o planejador do sistema utiliza $\overline{L}$. A segunda desigualdade é válida porque, sempre que se para algum par de pontos (i, j) $C_{ij}(\overline{L}, I) < C_{ij}(L, I)$, então $(i, j) \in J_h$, para algum $h \in \overline{L} \setminus L$. A penúltima desigualdade é válida pois $J_h \subseteq J \times J$. Finalmente, a última desigualdade é válida pois $M_h^{'}(L, I) \geq M_h^{''}(L, I)$.

□

6. Algoritmo Branch-and-cut

As desigualdades (5)-(9) representam uma formulação para o PHMI onde o número de restrições (7) tende a ser exponencial. Portanto, para resolver esta formulação de maneira eficiente, propomos gerar tais restrições sob demanda durante um algoritmo de textitbranch-and-cut ao invés de gerar todas elas antes da resolução do modelo. Nós vamos nos referir a este algoritmo como B&C.

O problema da separação das restrições (7) é definido da seguinte maneira. Dada uma solução relaxada $\bar{z}, \bar{x}$ satisfazendo (5), (6), (8), (9) e algumas restrições (7), o problema da separação consiste de encontrar as estratégias $L \in \mathscr{L}$ e $I \in \mathscr{I}(L)$ que maximizam a violação (lado direito) de (7). Quando as variáveis $\bar{x}$ relaxadas são todas inteiras, podemos tomar L como sendo a estratégia de localização associada a estas variáveis e encontrar apenas a estratégia de interdição I.

O algoritmo B&C consiste de resolver (5)-(9) usando resolvedores de PLI comerciais. As restrições (7) são adicionadas sob demanda pelo do *callback* de cortes do resolvedor após a resolução do problema da separação descrito previamente. Para a resolução deste problema, nós usamos dois algoritmos: um algoritmo exato de enumeração completa (EC) e uma heurística gulosa (HG). Estes dois algoritmos são explicados com maiores detalhes na Seção 7.

O Algoritmo 1 descreve todos os passos do algoritmo B&C. O algoritmo começa na linha 18 onde é feita a construção do modelo PLI (5)-(9) inicialmente sem nenhuma restrição (7).

https://proceedings.science/p/85319?lang=pt-br

Para resolver tal modelo, nós usamos o resolvedor CPLEX 12.5.1. No entanto, qualquer resolvedor comercial PLI que permita o uso de *callback* de cortes poderia ser utilizado. A função SEPARAÇÃO é definida como um *callback* de cortes (linha 19). O CPLEX chama esta função em cada nó do clássico algoritmo de *branch-and-bound* ou sempre que uma solução inteira é encontrada. A função SEPARAÇÃO é executada somente se as variáveis relaxadas $\bar{x}$ forem todas inteiras (linha 2). Neste caso, a estratégia de localização L é construída de acordo com o valor destas variáveis. Em seguida, encontra-se a estratégia de interdição I através da heurística HG (linha 5). Se o corte associado viola (7) (linha 6), então este é inserido (linha 7). Caso contrário, o algoritmo B&C tenta encontrar um corte violado através do algoritmo exato EC (linhas 10-19).

Durante a nossa pesquisa, nós também tentamos algumas estratégias que visavam a obtenção de cortes associados a soluções relaxadas fracionárias. No entanto, os resultados não se mostraram satisfatórios.

Algoritmo 1 B&C

1: **Procedimento** SEPARAÇÃO($\bar{x}, \bar{z}$)
2: **Se** ($\bar{x}$) são todas inteiras **então**
3: Tome L como sendo a estratégia associada as variáveis $\bar{x}$.
4: $viola$ = falso
5: Encontre I através da heurística HG.
6: **Se** $C(L, I) > \bar{z}$ **então**
7: adicione $z \geq C(L, I) - \sum_{h \notin L} M_h(L, I)x_h$ ao PLI como um corte.
8: $viola$ = verdadeiro
9: **Fim Se**
10: **Se** $viola == falso$ **então**
11: Encontre I através do algoritmo EC.
12: **Se** $C(L, I) > \bar{z}$ **então**
13: adicione $z \geq C(L, I) - \sum_{h \notin L} M_h(L, I)x_h$ ao PLI como um corte.
14: **Fim Se**
15: **Fim Se**
16: **Fim Se**
17: **Fim Procedimento**

18: Construa o PLI (5)-(9) sem as restrições (7).
19: Chame o CPLEX tomando SEPARAÇÃO como um *callback* de cortes.

7. Algoritmos para separação de cortes

Nesta seção são detalhados os dois diferentes métodos utilizados para a separação de cortes (7): a heurística HG e o algoritmo EC. Como só separamos cortes para soluções relaxadas inteiras, o problema da separação é equivalente a problema RHIM mencionado na Seção 2.2 e já estudado por Lei [2013] e Quadros et al. [2018].

Os dois métodos de separação recebem uma estratégia de localização L (linha 3 do Algoritmo 1) e retornam uma estratégia de interdição I.

A separação via heurística HG é chamada em cada nó da árvore *branch-and-bound* (linha 5), sempre que as variáveis relaxadas $\bar{x}$ são todas inteiras. A heurística aqui utilizada é a mesma que a proposta por Quadros et al. [2018]. O Algoritmo 2 apresenta o pseudocódigo de tal heurística. Ao final do procedimento, uma estratégia de interdição I^*, cujo custo é representado por $Custo^*$, é retornada. O Algoritmo é apresentado a seguir.

https://proceedings.science/p/85319?lang=pt-br

A heurística começa encontrando os dois hubs mais críticos no sistema (passos 3-9), ou seja, os dois hubs que, se interditados, resultariam no maior aumento do custo total de distribuição. Estes dois hubs são adicionados à estratégia I^*. Após isto, se $r > 2$, os $r - 2$ hubs remanescentes são adicionados um de cada vez à estratégia I^* de acordo com o maior aumento no custo $Custo^*$ (passos 10-22).

Algoritmo 2 Heurística Gulosa

1: $Custo^* \leftarrow 0$
2: $I^* \leftarrow \emptyset$
3: **Para** k_1, k_2 **faça** 1 $H \setminus L$ com $k_1 \neq k_2$
4: $I \leftarrow \{k_1, k_2\}$
5: **Se** $C(L, I) > Custo^*$ **então**
6: $Custo^* \leftarrow C(L, I)$
7: $I^* \leftarrow I$
8: **Fim Se**
9: **Fim Para**
10: **Se** $r > 2$ **então**
11: **Enquanto** $|I^*| < r$ **faça**
12: Interdição $\leftarrow \emptyset$
13: **Para** k_1 **faça** 1 $H \setminus L \setminus I^*$
14: $I \leftarrow I^* \cup \{k_1\}$
15: **Se** $C(L, I) > Cost^*$ **então**
16: $Custo^* \leftarrow C(L, I)$
17: Interdição $\leftarrow \{k_1\}$
18: **Fim Se**
19: **Fim Para**
20: $I^* \leftarrow I^* \cup$ Interdição
21: **Fim Enquanto**
22: **Fim Se**

o algoritmo EC é utilizado somente quando a heurística HG não encontra um corte violado. O algoritmo EC simplesmente percorre todas as possíveis estratégias de interdição $I \in \mathscr{I}(L)$, retornando aquela que maximiza $C(L, I)$.

Nós ainda tentamos usar o modelo PLI proposto em Lei [2013] para o RHIM como método de separação exata. No entanto, o algoritmo EC se mostrou mais rápido para todas as instâncias testadas.

8. Resultados Computacionais

Nesta seção são apresentados os resultados computacionais associados ao B&C. Os experimentos foram feitos em um computador com processador Intel Core i7-4790 com CPU de 3.60GHz e 16GB de memória RAM, com o Windows 8.1 como sistema operacional. O modelo foi programado em C++ e compilado no programa IDE Visual Studio 2015, tendo o CPLEX 12.5.1 como resolvedor. Para este, os testes utilizaram uma única *thread* enquanto outros parâmetros do CPLEX não foram alterados.

8.1. Geração das Instâncias

As instâncias aqui utilizadas foram as mesmas utilizadas por Ghaffarinasab e Atayi [2017] e são geradas a partir duas bases de dados, chamadas CAB25 e TR81. Estas bases são amplamente utilizadas nas pesquisas de localização de hubs, com ou sem interdição. A base CAB25 foi introduzida por O'kelly [1987] e é baseada na interações de passageiros de linhas aéreas entre 25 cidades dos Estados Unidos em 1970. Já a base TR81 foi introduzida por Tan e Kara [2007] e se baseia no transporte de cargas da Turquia, considerando 81 cidades, numeradas de 1 a 81. As bases CAB25 e

https://proceedings.science/p/85319?lang=pt-br

TR81 apresentam respectivamente 25 e 81 pontos. Além disso, estas fornecem o fluxo (demanda) e o custo de transporte entre cada par de pontos, sendo o custo proporcional à distância entre os pontos.

Para a geração das instâncias, o conjunto J foi considerado como o conjunto composto por todos os pontos da base de dados. Já o conjunto H formado pelos pontos que representam os potenciais hubs utilizado foi $H = J$, na base CAB25 e $H = \{1, 3, 5, 6, 7, 16, 20, 21, 23, 25, 26, 27, 34, 35, 38, 42, 44, 55, 61, 65, 68\}$, na base TR81. Para gerarmos diversas instâncias diferentes, variamos os parâmetros $p \in \{3, 4, 5\}$, $r \in \{1, 2, ..., p-1\}$ e $\alpha \in \{0,4; 0,6; 0,8\}$.

Uma importante característica das bases CAB e TR é que a matriz de custos é simétrica. Consequentemente, para cada $(i, j) \in J \times J$ os pares O-D (i, j) e (j, i) podem então ser agregados em um único par com fluxo $w_{ij} + w_{ji}$. Além disso, não existe fluxo de um ponto para ele mesmo. Assim, foi aplicado um pré-processamento antes do algoritmo B&C em si, de modo a reduzir o número de pares O-D. Especificamente, o número de pares O-D para os conjuntos de dados CAB e TR é, respectivamente, 300 e 3.240 após a redução feita.

8.2. Comparação entre os métodos exatos

Para cada umas das instâncias testadas, três métodos exatos foram aplicados: método Enumeração Exaustiva (EE), método B&C tomando $M_h(L, I) = M_h^{'}(L, I)$ (B&C $M^{'}$) e método B&C tomando $M_h(L, I) = M_h^{''}(L, I)$ (B&C $M^{''}$). O método EE consiste em duas partes: na primeira é feita uma enumeração de cada uma das estratégias de localização $L \in \mathscr{L}$ possíveis. Na segunda, para cada uma das soluções da etapa anterior, é encontrada a estratégia de interdição $I \in \mathscr{I}(L)$ que maximiza $C(L, I)$. O menor destes máximos é retornado como valor ótimo.

As Tabelas 1 e 2 comparam para a Instancias CAB25 e TR81 respectivamente os tempos computacionais obtidos pelo método EE, método B&C $M^{'}$ e método B&C $M^{''}$. Os seguintes cabeçalhos são utilizados. Coluna *opt* indica custo total ótimo após as localizações e interdições. As Colunas tempo EE, B&C $M^{'}$, B&C $M^{''}$ indicam os tempos de CPU em segundos gastos respectivamente pelos métodos EE, B&C $M^{'}$, B&C $M^{''}$. Nós marcamos em negrito os menores tempos.

Observando as Tabelas 1 e 2, podemos notar que para as instâncias pequenas, o método EE se mostra mais adequado. Tal resultado já era esperado uma vez que o número de estratégias de localização e interdição para estas instâncias é relativamente pequeno, facilitando métodos baseados na enumeração. Outro ponto importante a ser destacado é que o B&C só foi mais rápido que o FB quando foi utilizado $M_h(L, I) = M_h^{''}(L, I)$, o que mostra a importância da proposição deste fortalecimento.

9. Conclusões

Neste trabalho, apresentamos pela primeira vez uma formulação PLI e um método exato para o problema da p-hub mediana com interdições. Mostramos que a formulação é válida sob duas formas: uma mais intuitiva e outra que utiliza restrições fortalecidas. Para resolver a formulação, propomos resolver a formulação através de um algoritmo branch-and-cut, onde as restrições são geradas sob demanda. Para comprovar a robustez do método proposto, experimentos computacionais são apresentados, onde é feita uma comparação do método com um algoritmo de enumeração exaustiva. Os resultados mostram que o método proposto na sua versão fortalecida é mais rápido, especialmente nas instâncias médias e grandes.

Como trabalhos futuros, pretendemos propor novos fortalecimentos para a formulação, bem como tratar o problema através de metaheurísticas dada a dificuldade encontrada de se resolver o problema de maneira exata.

Referências

Aksen, D. e Aras, N. (2012). A bilevel fixed charge location model for facilities under imminent attack. *Computers & Operations Research*, 39(7):1364–1381.

Aksen, D., Aras, N., e Piyade, N. (2013). A bilevel p-median model for the planning and protection of critical facilities. *Journal of Heuristics*, 19(2):373–398.

https://proceedings.science/p/85319?lang=pt-br

Aksen, D., Şengül Akca, S., e Aras, N. (2014). A bilevel partial interdiction problem with capacitated facilities and demand outsourcing. *Computers & Operations Research*, 41:346–358.

Button, K. (2002). Debunking some common myths about airport hubs. *Journal of Air Transport Management*, 8(3):177 – 188. ISSN 0969-6997. Developments in Air Transport Economics.

Church, R. L., Scaparra, M. P., e Middleton, R. S. (2004). Identifying critical infrastructure: the median and covering facility interdiction problems. *Annals of the Association of American Geographers*, 94(3):491–502.

Ghaffarinasab, N. e Atayi, R. (2017). An implicit enumeration algorithm for the hub interdiction median problem with fortification. *European Journal of Operational Research*, p. – . ISSN 0377-2217. URL https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0377221717310469.

Ghare, P. M., Montgomery, D. C., e Turner, W. C. (1971). Optimal interdiction policy for a flow network. *Naval Research Logistics Quarterly*, 18(1):37–45. ISSN 1931-9193.

Ishfaq, R. e Sox, C. R. (2011). Hub location–allocation in intermodal logistic networks. *European Journal of Operational Research*, 210(2):213 – 230. ISSN 0377-2217.

Kim, H. e O'Kelly, M. E. (2009). Reliable p-hub location problems in telecommunication networks. *Geographical Analysis*, 41(3):283–306. ISSN 1538-4632.

Lei, T. L. (2013). Identifying critical facilities in hub-and-spoke networks: A hub interdiction median problem. *Geographical Analysis*, 45(2):105–122. ISSN 1538-4632.

Losada, C., Scaparra, M. P., Church, R. L., e Daskin, M. S. (2012). The stochastic interdiction median problem with disruption intensity levels. *Annals of Operations Research*, 201(1):345–365.

McMasters, A. W. e Mustin, T. M. (1970). Optimal interdiction of a supply network. *Naval Research Logistics Quarterly*, 17(3):261–268. ISSN 1931-9193.

O'Hanley, J. R. e Church, R. L. (2011). Designing robust coverage networks to hedge against worst-case facility losses. *European Journal of Operational Research*, 209(1):23–36.

O'kelly, M. E. (1987). A quadratic integer program for the location of interacting hub facilities. *European Journal of Operational Research*, 32(3):393–404.

Parvaresh, F., Hashemi Golpayegany, S. A., Moattar Husseini, S. M., e Karimi, B. (2013). Solving the p-hub median problem under intentional disruptions using simulated annealing. *Networks and Spatial Economics*, 13(4):445–470. ISSN 1572-9427.

Quadros, H., Roboredo, M. C., e Pessoa, A. A. (2018). Algoritmos para identificar estruturas críticas em uma rede de transporte hub-and-spoke. *Engevista*, 20(1):1–19.

Tan, P. Z. e Kara, B. Y. (2007). A hub covering model for cargo delivery systems. *Networks*, 49(1):28–39.

Zhang, X., Zheng, Z., Zhang, S., e Du, W. (2016). Partial interdiction median models for multi-sourcing supply systems. *The International Journal of Advanced Manufacturing Technology*, 84(1):165–181. ISSN 1433-3015.

https://proceedings.science/p/85319?lang=pt-br

Tabela 1: Comparação entre os métodos exatos para instâncias CAB

n	p	q	r	alfa = 0,4				alfa = 0,6				alfa = 0,8			
				opt	Tempo(s)			opt	Tempo(s)			opt	Tempo(s)		
					EE	B&C $M^{'}$	B&C $M^{''}$		EE	B&C $M^{'}$	B&C $M^{''}$		EE	B&C $M^{'}$	B&C $M^{''}$
25	25	3	1	1206,33	**0,20**	10,66	5,20	1263,61	**0,16**	7,98	3,73	1301,61	**0,14**	4,63	2,17
25	25	3	2	1511,82	**0,44**	11,31	6,17	1511,82	**0,38**	7,02	5,03	1511,82	**0,30**	5,05	2,84
25	25	4	1	1021,43	**0,80**	52,70	13,52	1087,43	**0,66**	26,89	8,73	1132,00	**0,56**	9,78	6,28
25	25	4	2	1315,42	**2,67**	74,69	39,95	1360,26	**2,23**	43,52	26,27	1384,69	**1,91**	23,89	16,20
25	25	4	3	1523,66	**3,64**	85,36	36,38	1523,66	**3,11**	46,45	24,28	1523,66	**2,56**	27,16	17,16
25	25	5	1	891,75	**2,70**	183,16	29,31	963,14	**2,23**	54,09	13,34	1033,03	**1,84**	21,44	6,45
25	25	5	2	1137,13	**12,19**	640,92	107,33	1188,47	**10,58**	208,86	56,45	1234,10	**9,42**	64,36	25,98
25	25	5	3	1384,94	**17,89**	1125,47	433,20	1397,70	**14,70**	565,67	158,70	1401,90	**11,25**	138,28	75,45
25	25	5	4	1536,94	**22,50**	1113,41	247,17	1536,94	**19,28**	470,50	172,39	1536,94	**16,22**	166,08	99,66

https://proceedings.science/p/85319?lang=pt-br

Tabela 2: Comparação entre os métodos exatos para instâncias TR

n	p	q	r	alfa = 0,4				alfa = 0,6				alfa = 0,8			
				opt	Tempo(s)			opt	Tempo(s)			opt	Tempo(s)		
					EE	B&C $M^{'}$	B&C $M^{''}$		EE	B&C $M^{'}$	B&C $M^{''}$		EE	B&C $M^{'}$	B&C $M^{''}$
81	22	6	1	654,14	**26,36**	806,52	230,14	725,30	**27,80**	449,98	166,27	779,73	**17,61**	196,64	94,28
81	22	6	2	753,66	**83,53**	1402,72	370,11	804,71	**61,69**	572,00	225,00	842,71	**49,69**	202,95	106,84
81	22	6	3	893,17	**235,88**	3487,75	1056,47	919,88	**183,16**	1038,84	526,67	940,55	**144,45**	330,17	279,88
81	22	6	4	1029,27	**417,89**	5100,91	2002,94	1036,56	**280,55**	2159,59	813,17	1040,90	**226,70**	776,23	378,14
81	22	6	5	1140,66	**406,72**	6294,59	1868,27	1140,66	**339,45**	2892,11	945,25	1140,66	**278,27**	1039,31	533,41
81	22	10	1	532,48	**128,42**	2920,83	270,70	626,46	**116,86**	899,67	190,14	704,04	**101,53**	282,47	110,92
81	22	10	2	580,95	**305,20**	3629,41	485,39	663,73	216,66	980,36	**211,17**	733,64	193,77	362,20	**142,16**
81	22	10	3	632,91	**1074,88**	7076,08	1090,05	710,76	886,13	2561,03	**674,17**	768,46	741,16	642,11	**324,81**
81	22	10	4	719,27	5004,83	16120,09	**4389,00**	780,05	4117,94	7141,44	**1649,22**	826,47	3470,91	2327,61	**809,83**
81	22	10	5	812,38	9106,23	20267,17	**8610,77**	861,55	7695,27	13460,33	**5839,81**	899,02	6578,06	4518,72	**1751,22**
81	22	14	1	472,69	43,42	89,50	**32,14**	578,03	37,31	69,94	**34,98**	672,93	32,72	53,75	**30,58**
81	22	14	2	502,62	130,44	118,52	**48,89**	607,82	146,50	99,97	**43,36**	692,40	104,33	70,55	**40,92**
81	22	14	3	541,56	645,02	287,63	**137,52**	636,68	594,67	136,27	**100,16**	716,82	713,91	117,30	**89,95**
81	22	14	4	577,22	1988,92	305,33	**118,73**	668,23	1909,56	243,02	**103,75**	740,02	1936,69	137,92	**76,05**
81	22	14	5	628,67	8454,92	743,02	**299,11**	704,42	6278,47	346,31	**178,48**	765,38	5028,73	145,80	**80,06**

https://proceedings.science/p/85319?lang=pt-br