AUTOVALORES DISTÂNCIA LAPLACIANOS DE ALGUMAS CLASSES DE ÁRVORES

Diego de Souza Maceira Belay
COPPE/PEP – Universidade Federal do Rio de Janeiro
Cidade Universitária, Centro de Tecnologia, Bloco F - Rio de Janeiro - RJ
dbelay@gmail.com

Maria Aguieiras Alvarez de Freitas
Instituto de Matemática e COPPE/PEP – Universidade Federal do Rio de Janeiro
Cidade Universitária, Centro de Tecnologia, Bloco C - Rio de Janeiro - RJ
maguieiras@im.ufrj.br

RESUMO

O objetivo deste trabalho é estudar, sob o ponto de vista da Teoria Espectral de Grafos, as matrizes distância e suas laplacianas e determinar o $\mathcal{D}^L$-espectro da dupla vassoura equilibrada e da dupla estrela a partir de resultados presentes na literatura.

PALAVRAS CHAVE. Teoria Espectral de Grafos, Árvores, Matriz Distância Laplaciana.

Tópicos: Teoria e Algoritmos em Grafos

ABSTRACT

The goal of this work is to study, from the point of view of Spectral Graph Theory, the distance matrix and its Laplacians and we determined the $\mathcal{D}^L$-spectrum of the balanced double broom and double star from results in the literature.

KEYWORDS. Spectral Graph Theory. Trees. Distance Laplacian Matrix.

Paper topics: Theory and Algorithms in Graphs

https://proceedings.science/p/85315?lang=pt-br

1. Introdução

A Teoria Espectral de Grafos busca estudar propriedades do grafo a partir do espectro de matrizes que o representam. Dentre essas matrizes, destacamos a matriz de adjacência, a matriz laplaciana, a matriz laplaciana sem sinal e a matriz distância.

A matriz de adjacência de um grafo G com n vértices, $A(G) = [a_{i,j}]$, é a matriz quadrada de ordem n, tal que $a_{i,j} = 1$, se os vértices v_i e v_j são adjacentes e, em caso contrário, $a_{i,j} = 0$.

A matriz laplaciana de um grafo G é a matriz $L(G) = Deg(G) - A(G)$, onde $Deg(G) = Diag(d_1, ..., d_n)$ é a matriz diagonal dos graus dos vértices de G. Por outro lado, temos que a matriz laplaciana sem sinal de um grafo G é dada por $Q(G) = Deg(G) + A(G)$.

Por fim, a matriz distância de um grafo conexo G, $\mathcal{D}(G) = [d_{ij}]$, é a matriz quadrada de ordem n, tal que $d_{ij} = d(v_i, v_j)$. Como $d(v_i, v_i) = 0$, tal matriz tem sua diagonal principal nula.

Neste trabalho, chamaremos as árvores de diâmetro 3, onde há dois vértices adjacentes tais que o primeiro está ligado a s folhas e o segundo a t folhas, como mostra a Figura 1, de *duplas estrelas* e denotaremos por $V(s, t, 3)$. A partir do trabalho de Fallat e Kirkland [1998], definimos que dado um diâmetro d, as árvores $V(s, t, d)$ serão chamadas de *duplas vassouras* (*double brooms*), como mostra a Figura 2.

Na Seção 2 introduziremos duas matrizes simétricas associadas a um grafo, a saber, as matrizes distância laplaciana e distância laplaciana sem sinal. Além disso, apresentaremos alguns resultados presentes na literatura. Na Seção 3, determinaremos o $\mathcal{D}^L$-espectro da dupla vassoura equilibrada e da dupla estrela a partir de resultados presentes na literatura.

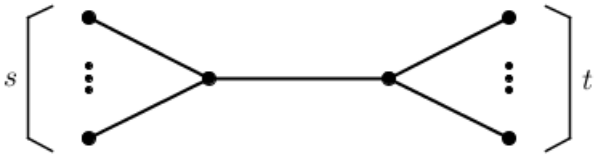


Figura 1: Árvore $V(s, t, 3)$.



Figura 2: Árvore $V(s, t, d)$, $n = s + t + d - 1$.

2. As matrizes $\mathcal{D}^L$, $\mathcal{D}^Q$ e resultados na literatura

A matriz distância, definida na Seção 1, foi introduzida de forma rudimentar por Brunel [1895]. Segundo Aouchiche e Hansen [2014], essa matriz ganhou destaque após Graham e Pollack [1971] provarem que o determinante da matriz distância de uma árvore não valorada depende apenas do seu número de vértices.

A partir de uma abordagem similar à utilizada na matriz de adjacência para definir as matrizes laplaciana e laplaciana sem sinal, Aouchiche e Hansen [2013] introduziram duas novas laplacianas para a matriz distância.

Seja G um grafo conexo, a transmissão $Tr(v)$ de um vértice v de G é definida como a soma das distâncias de v a todos os outros vértices de G, ou seja, $Tr(v) = \sum_{u \in V(G)} d(u, v)$. Portanto, $Tr(v)$ é igual à soma das entradas da linha de $\mathcal{D}(G)$ referente ao vértice v.

https://proceedings.science/p/85315?lang=pt-br

Definição 2.1 (Aouchiche e Hansen [2013]). *A matriz distância laplaciana de um grafo G é a matriz $\mathcal{D}^L(G) = Tr(G) - \mathcal{D}(G)$, onde $Tr(G)$ é a matriz diagonal das transmissões dos vértices de G. O polinômio característico desta matriz, denotado por $P^G_{\mathcal{D}^L}(x)$, é chamado polinômio característico distância laplaciano do grafo G. Os autovalores de $\mathcal{D}^L(G)$ são chamados autovalores distância laplacianos de G. O espectro distância laplaciano de G é o espectro de $\mathcal{D}^L(G)$, dado pela lista de autovalores dispostos em ordem não crescente e será denotado por $Sp(\mathcal{D}^L(G)) = (\partial^L_1, \partial^L_2, \ldots, \partial^L_n)$.*

Definição 2.2 (Aouchiche e Hansen [2013]). *A matriz distância laplaciana sem sinal de um grafo G é a matriz $\mathcal{D}^Q(G) = Tr(G) + \mathcal{D}(G)$, onde $Tr(G)$ é a matriz diagonal das transmissões dos vértices de G. O polinômio característico desta matriz, denotado por $P^G_{\mathcal{D}^Q}(x)$, é chamado polinômio característico distância laplaciano sem sinal do grafo G. Os autovalores de $\mathcal{D}^Q(G)$ são chamados autovalores distância laplacianos sem sinal de G. O espectro distância laplaciano sem sinal de G é o espectro de $\mathcal{D}^Q(G)$, dado pela lista de autovalores dispostos em ordem não crescente e será denotado por $Sp(\mathcal{D}^Q(G)) = (\partial^Q_1, \partial^Q_2, \ldots, \partial^Q_n)$.*

De modo análogo ao que ocorre com as matrizes A, L e Q, temos propriedades similares com as matrizes $\mathcal{D}$, $\mathcal{D}^L$ e $\mathcal{D}^Q$. Em particular, assim como a matriz L, a matriz $\mathcal{D}^L$ não é invertível, ou seja, $\mathcal{D}^L\mathbf{1} = \mathbf{0}$. Além disso, por ser diagonalmente domintante e todas as entradas da diagonal principal serem não nulas, temos que $\mathcal{D}^L$ é semidefinida positiva.

Apesar de recente, vários resultados relacionados a essas novas matrizes já foram provados. Destacamos os resultados abaixo.

Teorema 2.3 (Aouchiche e Hansen [2011]). *Seja G um grafo conexo com um cluster S de ordem $k \geq 2$. Então, $Tr(u) = Tr(v) = \tilde{t}$, $\forall\ u, v \in S$, e $\tilde{t} + 2$ é um autovalor distância laplaciano de G com multiplicidade pelo menos $k - 1$.*

Teorema 2.4 (Lin e Lu [2015]). *Seja $G_{p,q}$ o grafo obtido a partir de G ligando dois caminhos pendentes de tamanhos p e q ao vértice u de G com $|V(G)| \geq 2$. Se $q \geq p \geq 1$, então $\rho(\mathcal{D}^Q(G_{p-1,q+1})) > \rho(\mathcal{D}^Q(G_{p,q}))$, onde ρ denota o maior autovalor.*

Teorema 2.5 (da Silva Junior e Nikiforov [2015]). *O maior autovalor da matriz distância laplaciano de um grafo conexo G, de ordem n, é maximal se, e somente se, G é um caminho.*

3. $\mathcal{D}^L$-espectros do caminho e da dupla vassoura equilibrada

Apesar da matriz $\mathcal{D}^L$ ter sido definida recentemente, resultados envolvendo o $\mathcal{D}^L$-espectro de algumas classes de grafos já foram obtidos. Nesta seção buscaremos explicar os resultados de Nath e Paul [2014] e, a partir deles, encontrar o $\mathcal{D}^L$-espectro da dupla vassoura equilibrada.

3.1. Caminhos

Em experimentos computacionais pudemos perceber que para caminhos, as transmissões de alguns vértices sempre eram autovalores distância laplacianos. Além de determinar quais eram esses vértices, Nath e Paul [2014] determinaram qual matriz possui os autovalores que faltavam no espectro do caminho. O Lema 3.1 é a motivação dos próximos teoremas.

Lema 3.1 (Nath e Paul [2014]). *Seja $M = \begin{bmatrix} A & B \\ B & A \end{bmatrix}$ uma matriz em blocos. Então λ é autovalor de M se, e somente se, λ é autovalor de $A + B$ ou $A - B$.*

À luz do Lema 3.1, dado um grafo conexo G, se for possível obter uma rotulação de seus vértices de modo que a matriz $\mathcal{D}^L(G)$ fique no formato $\begin{bmatrix} A & B \\ B & A \end{bmatrix}$, o $\mathcal{D}^L$-espectro de G ficará determinado encontrando-se os autovalores de $A+B$ e de $A-B$. O problema consiste em encontrar tal rotulação, caso ela exista.

https://proceedings.science/p/85315?lang=pt-br



Figura 3: Rotulação do caminho P_{2k}.

Esta estratégia foi utilizada por Nath e Paul [2014] para determinar o espectro distância laplaciano de um caminho, como veremos nos próximos resultados.

Para o caminho de diâmetro ímpar P_{2k}, consideremos a rotulação conforme a Figura 3.

Então, para todo $i = 1, 2, ..., k$, temos

$$Tr(i) = Tr(k+i) = \sum_{j=1}^{k+i-1} j + \sum_{j=1}^{k-i} j = k^2 + i^2 - i. \tag{1}$$

A partir desta rotulação, a matriz $\mathcal{D}^L(P_{2k})$ pode ser escrita no formato $\begin{bmatrix} A & B \\ B & A \end{bmatrix}$, onde $A = \mathcal{D}^L(P_k)$ e $B = [-d_{ij}]$, onde $1 \leq i \leq k$ e $k+1 \leq j \leq 2k$:

$$A = \begin{bmatrix} Tr(1) & -1 & -2 & \cdots & -(k-1) \\ -1 & Tr(2) & -1 & \cdots & -(k-2) \\ -2 & -1 & Tr(3) & \cdots & -(k-3) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -(k-1) & -(k-2) & -(k-3) & \cdots & Tr(k) \end{bmatrix}, \tag{2}$$

$$B = \begin{bmatrix} -1 & -2 & -3 & \cdots & -k \\ -2 & -3 & -4 & \cdots & -(k+1) \\ -3 & -4 & -5 & \cdots & -(k+2) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -k & -(k+1) & -(k+2) & \cdots & -(2k-1) \end{bmatrix}, \tag{3}$$

$$A+B = \begin{bmatrix} Tr(1)-1 & -3 & -5 & \cdots & -(2i-1) & \cdots & -(2k-1) \\ -3 & Tr(2)-3 & -5 & \cdots & -(2i-1) & \cdots & -(2k-1) \\ -5 & -5 & Tr(3)-5 & \cdots & -(2i-1) & \cdots & -(2k-1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -(2i-1) & -(2i-1) & -(2i-1) & \cdots & Tr(i)-(2i-1) & \cdots & -(2k-1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -(2k-1) & -(2k-1) & -(2k-1) & \cdots & -(2k-1) & \cdots & Tr(k)-(2k-1) \end{bmatrix}. \tag{4}$$

No Lema 3.2 são calculados os autovalores da matriz A+B.

Lema 3.2 (Nath e Paul [2014]). *Se A e B são as matrizes (2) e (3), então $Sp(A+B) = (0, Tr(2), ..., Tr(k))$.*

A partir do Lema 3.1, temos o seguinte resultado:

Teorema 3.3 (Nath e Paul [2014]). *Sejam A e B as matrizes (2) e (3). Então $Sp(\mathcal{D}^L(P_{2k})) = (0, \lambda_1, ..., \lambda_k, Tr(2), ..., Tr(k))$, onde λ_j são autovalores de $(A-B)$, $\forall j = 1, 2, ..., k$.*

https://proceedings.science/p/85315?lang=pt-br

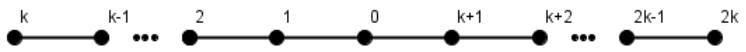


Figura 4: Rotulação do caminho P_{2k}.

Já para o caminho de diâmetro par P_{2k+1}, podemos rotular como na Figura 4. Neste caso, para todo $i = 1, 2, ..., k$, temos

$$Tr(i) = Tr(k+i) = \sum_{j=1}^{k+i} j + \sum_{j=1}^{k-i} j = k^2 + i^2 + k. \tag{5}$$

Além disso, $Tr(0) = 2\sum_{j=1}^{k} j = k^2 + k$.

A partir da rotulação acima, a matriz $\mathcal{D}^L(P_{2k+1})$ pode ser escrita como

$$\begin{bmatrix} Tr(0) & Z^T & Z^T \\ Z & A & C \\ Z & C & A \end{bmatrix},$$

onde $Z^T = \begin{bmatrix} -1 & -2 & -3 & \cdots & -k \end{bmatrix}$ e $C = B - \mathbb{J}_k$, sendo A e B as matrizes dadas em (2) e (3).

Apesar do Lema 3.1 não se aplicar, Nath e Paul [2014] provam uma versão análoga ao Teorema 3.3 para caminhos de diâmetro par.

Teorema 3.4 (Nath e Paul [2014])**.** *Sejam A e C as matrizes dadas acima. Então $Sp(\mathcal{D}^L(P_{2k+1})) = (0, \lambda_1, ..., \lambda_k, Tr(1), ..., Tr(k))$, onde λ_j são autovalores de $A - C$, $\forall j = 1, 2, ..., k$.*

3.2. Duplas Vassouras Equilibradas

Com um raciocínio semelhante ao da seção anterior, podemos explorar o espectro das duplas vassouras equilibradas, isto é, as árvores $V(s, t, d)$ onde $s = t$. Seja $V(2k, t) = V(t, t, 2k+1)$ uma dupla vassoura equilibrada de diâmetro $2k + 1$. Vamos rotular seus vértices conforme a Figura 5.

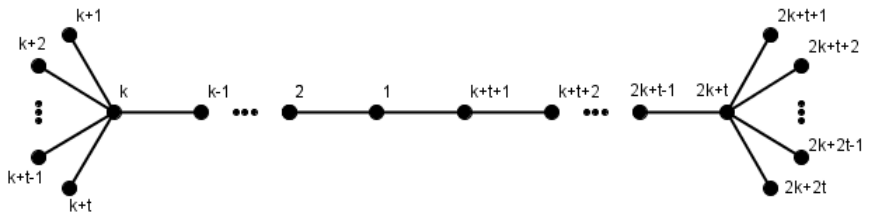


Figura 5: Dupla vassoura equilibrada $V(2k, t)$.

Observemos que se $1 \leq i \leq k$, então

$$d_{i,k+j} + d_{i,2k+t+j} = 2k + 1, \ 1 \leq j \leq t.$$

https://proceedings.science/p/85315?lang=pt-br

Temos então,

$$Tr(i) = \begin{cases} \sum_{j=1}^{i+k-1} j + \sum_{j=1}^{k-i} j + t(2k+1) = k^2 + i^2 - i + 2kt + t, \text{ se } i \leq k \\ \sum_{j=1}^{2k} j + t(2k+1) + 2(t-1) = 2k^2 + k + 2kt + 3t - 2, \text{ se } k < i \leq k+t \end{cases} . \quad (6)$$

É importante observar que $Tr(i) = Tr(k+t+i),\ \forall i = 1, 2, ..., k$. Além disso, todas as folhas possuem a mesma transmissão $2k^2 + k + 2kt + 3t - 2$, que denotaremos por $\tilde{t}$.

A partir desta rotulação, a matriz $\mathcal{D}^L(V(2k,t))$ pode ser escrita no formato $\begin{bmatrix} A & B \\ B & A \end{bmatrix}$, onde $A = \mathcal{D}^L\left(G\left[1, ..., k+t\right]\right) = \mathcal{D}^L\left(G\left[k+t+1, ..., 2k+2t\right]\right)$ e $B = [-d_{i,k+t+j}]$, onde $1 \leq i \leq k+t$ e $1 \leq j \leq k+t$.

$$A = \begin{bmatrix} Tr(1) & -1 & -2 & \cdots & -(k-1) & -k & -k & \cdots & -k \\ -1 & Tr(2) & -1 & \cdots & -(k-2) & -(k-1) & -(k-1) & \cdots & -(k-1) \\ -2 & -1 & Tr(3) & \cdots & -(k-3) & -(k-2) & -(k-2) & \cdots & -(k-2) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -(k-1) & -(k-2) & -(k-3) & \cdots & Tr(k) & -1 & -1 & \cdots & -1 \\ -k & -(k-1) & -(k-2) & \cdots & -1 & Tr(k+1) & -2 & \cdots & -2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -k & -(k-1) & -(k-2) & \cdots & -1 & -2 & -2 & \cdots & Tr(k+t) \end{bmatrix} \quad (7)$$

$$B = \begin{bmatrix} -1 & -2 & -3 & \cdots & -k & -(k+1) & -(k+1) & \cdots & -(k+1) \\ -2 & -3 & -4 & \cdots & -(k+1) & -(k+2) & -(k+2) & \cdots & -(k+2) \\ -3 & -4 & -5 & \cdots & -(k+2) & -(k+3) & -(k+3) & \cdots & -(k+3) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \\ -k & -(k+1) & -(k+2) & \cdots & -(2k-1) & -2k & -2k & \cdots & -2k \\ -(k+1) & -(k+2) & -(k+3) & \cdots & -2k & -(2k+1) & -(2k+1) & \cdots & -(2k+1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -(k+1) & -(k+2) & -(k+3) & \cdots & -2k & -(2k+1) & -(2k+1) & \cdots & -(2k+1) \end{bmatrix} \quad (8)$$

Como primeira contribuição, a Proposição 3.5 calcula os autovalores da matriz $A + B$.

Proposição 3.5. *Se A e B são as matrizes 7 e 8, então $Sp(A+B) = (0, Tr(2), ..., Tr(k), \underbrace{\tilde{t}+2, ..., \tilde{t}+2}_{t-1 \text{ vezes}}, \tilde{t} - 2t + 2)$.*

Demonstração. Primeiramente, observemos que a soma de cada linha da matriz $A + B$ é nula, ou seja, que $\mathbf{1}_{k+t}$ é autovetor de $A + B$ relacionado ao autovalor nulo:

$$(A+B)\mathbf{1_{k+t}} = \begin{bmatrix} Tr(1) - 1 - 3 - 5 - ... - (2k-1) - t(2k+1) \\ \vdots \\ -(i-1)(2i-1) + Tr(i) - (2i-1) - (2i+1) - ... - (2k-1) - t(2k+1) \\ \vdots \\ -k(2k-1) + Tr(k) - t(2k+1) \\ -(k+1)(2k+1) + Tr(k+1) - (t-1)(2k+3) \\ \vdots \\ -(k+1)(2k+1) + Tr(k+t) - (t-1)(2k+3) \end{bmatrix} =$$

https://proceedings.science/p/85315?lang=pt-br

$$= \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = \mathbf{0}_{k+t},$$

A seguir, provamos que $Tr(i)$ é autovalor de $A+B$, para todo $2 \leq i \leq k$. Seja $2 \leq i \leq k$, considere $\mathbf{x}_i = \begin{bmatrix} -\mathbf{1}_{i-1} \\ i-1 \\ \mathbf{0}_{k+t-i} \end{bmatrix}$. Calculando $(A+B)\mathbf{x}_i$, obtemos:

$$\begin{bmatrix} -Tr(1)+1+3+...+(2i-3)-(2i-1)(i-1) \\ \vdots \\ (2i-3)(i-2)-Tr(i-1)+(2i-3)-(2i-1)(i-1) \\ (2i-1)(i-1)+(Tr(i)-(2i-1))(i-1) \\ (2i+1)(i-1)-(2i+1)(i-1) \\ \vdots \\ (2k-1)(i-1)-(2k-1)(i-1) \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} -(k^2+i^2-i+2tk+t) \\ \vdots \\ -(k^2+i^2-i+2tk+t) \\ (k^2+i^2-i+2tk+t)(i-1) \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = (k^2+i^2-i+2tk+t) \begin{bmatrix} -\mathbf{1}_{i-1} \\ i-1 \\ \mathbf{0}_{k-i} \end{bmatrix}.$$

Logo, $Tr(i) = k^2+i^2-i+2kt+t$ é autovalor de $A+B$ associado ao autovetor $\mathbf{x}_i = \begin{bmatrix} -\mathbf{1}_{i-1} \\ i-1 \\ \mathbf{0}_{k+t-i} \end{bmatrix}$.

Assim como na demonstração do Teorema 2.3, temos que $(\tilde{t}+2)\mathbb{I}_{k+t} - (A+B)$ contém t linhas (colunas) idênticas. Portanto, $\tilde{t}+2$ é autovalor de $A+B$ com multiplicidade pelo menos $t-1$.

Por último, vamos mostrar que $\tilde{t}-2t+2 = 2k^2+k+2kt+t$ é autovalor de $A+B$ associado ao autovetor $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \mathbf{1}_k \\ -\frac{k}{t}\mathbf{1}_t \end{bmatrix}$. Calculando $(A+B)\mathbf{x}$, obtemos:

$$\begin{bmatrix} Tr(1)-1-3-...-(2k-1)+\frac{k}{t}t(2k+1) \\ \vdots \\ -k(2k-1)+Tr(k)+\frac{k}{t}t(2k+1) \\ -k(2k+1)-\frac{k}{t}(Tr(k+1)-(2k+1)-(t-1)(2k+3)) \\ \vdots \\ -k(2k+1)-\frac{k}{t}(Tr(k+1)-(2k+1)-(t-1)(2k+3)) \end{bmatrix} =$$

https://proceedings.science/p/85315?lang=pt-br

$$= \begin{bmatrix} 2k^2+k+2kt+t \\ \vdots \\ 2k^2+k+2kt+t \\ -\frac{k}{t}(2k^2+k+2kt+t) \\ \vdots \\ -\frac{k}{t}(2k^2+k+2kt+t) \end{bmatrix} = (2k^2+k+2kt+t) \begin{bmatrix} \mathbf{1}_k \\ -\frac{k}{t}\mathbf{1}_t \end{bmatrix}.$$

É importante notar que $Tr(2), Tr(3), ..., Tr(k), \tilde{t}+2$ e $\tilde{t}+2-2t$ são distintos. □

Como segunda contribuição, a partir do Lema 3.1 e utilizando o Teorema 2.3 e a Proposição 3.5, temos o seguinte resultado:

Proposição 3.6. *Sejam A e B as matrizes 7 e 8. Então $Sp(\mathcal{D}^L(V(2k,t))) = (0, \lambda_1, ..., \lambda_{k+1}, Tr(2), ..., Tr(k), \underbrace{\tilde{t}+2, ..., \tilde{t}+2}_{2(t-1)\ vezes}, \tilde{t}-2t+2)$, onde $Sp(A-B) = (\lambda_1, ..., \lambda_{k+1}, \underbrace{\tilde{t}+2, ..., \tilde{t}+2}_{t-1\ vezes})$.*

Demonstração. A matriz $\mathcal{D}^L(V(2k,t))$ tem dimensão $2k+2t$. Pela Proposição 3.5, calculamos todos os $k+t$ autovalores da matriz $A+B$. Além disso, pelo Teorema 2.3, sabemos que $\tilde{t}+2$ é autovalor de $\mathcal{D}^L(V(2k,t))$ com multiplicidade pelo menos $2(t-1)$, já que $V(2k,t)$ possui dois *clusters de tamanho t.*

Sendo $\mathcal{D}^L(V(2k,t)) = \begin{bmatrix} A & B \\ B & A \end{bmatrix}$, do Lema 3.1, temos que $Sp(\mathcal{D}^L(V(2k,t))) = =$ $(0, \lambda_1, ..., \lambda_{k+1}, Tr(2), ..., Tr(k), \underbrace{\tilde{t}+2, ..., \tilde{t}+2}_{2(t-1)\ vezes}, \tilde{t}-2t)$. □

Já para a dupla vassoura equilibrada de diâmetro par $V(2k+1,t)$, podemos rotular como na Figura 6.

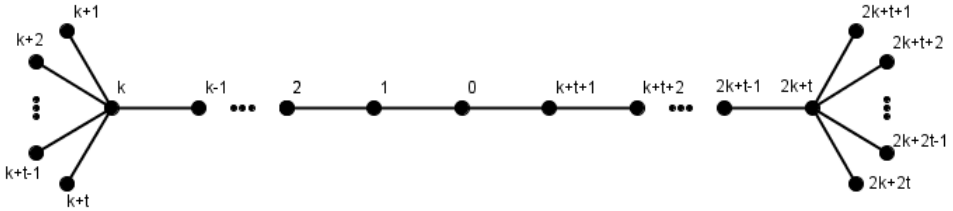


Figura 6: Rotulação da dupla vassoura equilibrada $V(2k+1,t)$.

Novamente, observemos que se $1 \leq i \leq k$, então

$$d_{i,k+j} + d_{i,2k+t+j} = 2k+2,\ 1 \leq j \leq t.$$

Neste caso,

$$Tr(i) = \begin{cases} 2\left(\sum_{j=1}^{k} j + t(k+1)\right) = k^2+k+2kt+2t, \text{ se } i=0 \\ \sum_{j=1}^{k-i} j + \sum_{j=1}^{k+i} j + t(2k+2) = k^2+k+i^2+2kt+2t, \text{ se } 1 \leq i \leq k \\ \sum_{j=1}^{2k+1} j + t(2k+2) + 2(t-1) = 2k^2+3k+2kt+4t-1, \text{ se } k < i \leq k+t \end{cases} . \quad (9)$$

https://proceedings.science/p/85315?lang=pt-br

É importante observar que $Tr(i) = Tr(k+t+i)$, $\forall i = 1, 2, ...k$. Além disso, todas as folhas possuem a mesma transmissão $2k^2 + 3k + 2kt + 4t - 1$, que denotaremos por $\tilde{t}$.

A partir da rotulação acima, a matriz $\mathcal{D}^L(V(2k+1,t))$ pode ser escrita como

$$\begin{bmatrix} Tr(0) & Z^T & Z^T \\ Z & A & C \\ Z & C & A \end{bmatrix},$$

onde $Z^T = [-1 \ -2 \ \cdots \ -k \ \underbrace{-(k+1) \ \cdots \ -(k+1)}_{t \ vezes}]$ e $C = B - \mathbb{J}_k$, sendo A e B as matrizes dadas em (7) e (8).

Novamente, apesar do Lema 3.1 não se aplicar, podemos provar uma versão análoga à Proposição 3.6 para duplas vassouras equilibradas de diâmetro par, que será a nossa terceira contribuição. A demonstração é análoga a do teorema anterior.

Teorema 3.7. *Sejam A e C as matrizes dadas acima. Então $Sp(\mathcal{D}^L(V(2k+1,t))) = (0, \lambda_1, ..., \lambda_{k+1}, Tr(1), ..., Tr(k), \underbrace{\tilde{t}+2, ..., \tilde{t}+2}_{2(t-1) \ vezes}, \tilde{t}-2t+2)$, onde $Sp(A-C) = (\lambda_1, ..., \lambda_{k+1}, \underbrace{\tilde{t}+2, ..., \tilde{t}+2}_{t-1 \ vezes})$.*

Um caminho natural seria começar a observar o que acontece quando as duplas vassouras não são equilibradas. Nosso próximo resultado calcula os autovalores distância laplacianos para uma dupla vassoura de diâmetro 3, $V(s,t,3)$, rotulada como na Figura 7.

Proposição 3.8. *Seja $V(s,t,3)$ uma dupla vassoura com $s+t$ folhas. Então $Sp(\mathcal{D}^L(V(s,t,3))) = (0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, 2s+3(t+1)^{[s-1]}, 3(s+1)+2t^{[t-1]})$, onde $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3$ são as raízes do polinômio*

$$f(x) = x^3 - (6(s+t)+8)x^2 + (11(s^2+t^2) + 31(s+t) + 23st + 21)x -$$

$$-6(s^3+t^3+10st) - 21st(s+t) - 27(s^2+t^2) - 39(s+t) - 18),$$

e os números entre colchetes representam as multiplicidades dos autovalores.

Demonstração. Sejam V_1 o *cluster* de tamanho s e V_2 o *cluster* de tamanho t de $V(s,t,3)$. Temos que

$$Tr(v) = \begin{cases} 2s+3t+1, \text{ se } v \in V_1 \\ 3s+2t+1, \text{ se } v \in V_2 \end{cases}.$$

Pelo Teorema 2.3, sabemos que $2s+3t+3$ e $3s+2t+3$ são autovalores de $\mathcal{D}^L(V(s,t,3))$ com multiplicidade pelo menos $s-1$ e $t-1$, respectivamente.

Rotulamos $V(s,t,3)$ como na Figura 7.

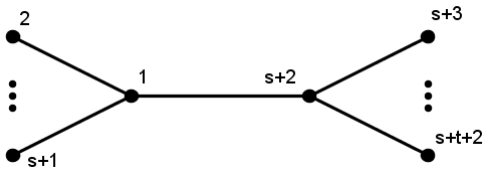


Figura 7: Rotulação da dupla vassoura $V(s,t,3)$.

A matriz $\mathcal{D}^L(V(s,t,3))$ pode ser escrita como:

$$\begin{bmatrix} s+2t+1 & -\mathbf{1}_s^T & -1 & -2\mathbf{1}_t^T \\ -\mathbf{1}_s & (2s+3t+3)\mathbb{I}_s - 2\mathbb{J}_s & -2\mathbf{1}_s & -3\mathbb{J}_{s\times t} \\ -1 & -2\mathbf{1}_s^T & 2s+t+1 & -\mathbf{1}_t^T \\ -2\mathbf{1}_t & -3\mathbb{J}_{t\times s} & -\mathbf{1}_t & (3s+2t+3)\mathbb{I}_t - 2\mathbb{J}_t \end{bmatrix},$$

https://proceedings.science/p/85315?lang=pt-br

já que $Tr(1) = s + 2t + 1$ e $Tr(s+2) = 2s + t + 1$.

Primeiro, vamos provar que $\mathbf{w} = \begin{bmatrix} 0_{s+2} \\ \mathbf{w}_t \end{bmatrix}$, onde $\mathbf{w}_t \in \mathbb{R}^t$ e $\langle \mathbf{w}_t, \mathbf{1}_t \rangle = 0$, é autovetor associado ao autovalor $3s + 2t + 3$.

De fato, $\mathcal{D}^L(V(s,t,3)) \times \mathbf{w} =$

$$\begin{bmatrix} s+2t+1 & -\mathbf{1}_s^T & -1 & -2\mathbf{1}_t^T \\ -\mathbf{1}_s & (2s+3t+3)\mathbb{I}_s - 2\mathbb{J}_s & -2\mathbf{1}_s & -3\mathbb{J}_{s\times t} \\ -1 & -2\mathbf{1}_s^T & 2s+t+1 & -\mathbf{1}_t^T \\ -2\mathbf{1}_t & -3\mathbb{J}_{t\times s} & -\mathbf{1}_t & (3s+2t+3)\mathbb{I}_t - 2\mathbb{J}_t \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0_{s+2} \\ \mathbf{w}_t \end{bmatrix} =$$

$$= (3s+2t+3) \begin{bmatrix} 0_{s+2} \\ \mathbf{w}_t \end{bmatrix} = (3s+2t+3)\mathbf{w}.$$

De forma análoga, temos que $\mathbf{y} = \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{y}_s \\ 0_{t+1} \end{bmatrix}$, onde $\mathbf{y}_s \in \mathbb{R}^s$ e $\langle \mathbf{v}_s, \mathbf{1}_s \rangle = 0$, é autovetor associado ao autovalor $2s + 3t + 3$.

Agora, consideremos a matriz

$$B = \begin{bmatrix} s+2t+1 & -s & -1 & -2t \\ -1 & 3t+3 & -2 & -3t \\ -1 & -2s & 2s+t+1 & -t \\ -2 & -3s & -1 & 3s+3 \end{bmatrix}$$

e seja λ um autovalor de B com autovetor associado $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} a & b & c & d \end{bmatrix}^T$, isto é,

$$B \times \mathbf{v} = \begin{bmatrix} s+2t+1 & -s & -1 & -2t \\ -1 & 3t+3 & -2 & -3t \\ -1 & -2s & 2s+t+1 & -t \\ -2 & -3s & -1 & 3s+3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} (s+2t+1)a - sb - c - 2td \\ -a + (3t+3)b - 2c - 3td \\ -a - 2sb + (2s+t+1)c - td \\ -2a - 3sb - c + (3s+3)d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda a \\ \lambda b \\ \lambda c \\ \lambda d \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix}. \tag{10}$$

Vamos provar que λ é autovalor de $\mathcal{D}^L(V(s,t,3))$ com autovetor associado $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} a \\ b\mathbf{1}_s \\ c \\ d\mathbf{1}_t \end{bmatrix}$. De fato, $\mathcal{D}^L(V(s,t,3)) \times \mathbf{u} =$

$$= \begin{bmatrix} s+2t+1 & -\mathbf{1}_s^T & -1 & -2\mathbf{1}_t^T \\ -\mathbf{1}_s & (2s+3t+3)\mathbb{I}_s - 2\mathbb{J}_s & -2\mathbf{1}_s & -3\mathbb{J}_{s\times t} \\ -1 & -2\mathbf{1}_s^T & 2s+t+1 & -\mathbf{1}_t^T \\ -2\mathbf{1}_t & -3\mathbb{J}_{t\times s} & -\mathbf{1}_t & (3s+2t+3)\mathbb{I}_t - 2\mathbb{J}_t \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} a \\ b\mathbf{1}_s \\ c \\ d\mathbf{1}_t \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} (s+2t+1)a - bs - c - 2dt \\ -a\mathbf{1}_s + (2s+3t+3-2s)b\mathbf{1}_s - 2c\mathbf{1}_s - 3dt\mathbf{1}_s \\ -a - 2bs + (2s+t+1)c - dt \\ -2a\mathbf{1}_t - 3sb\mathbf{1}_t - c\mathbf{1}_t + (3s+2t+3-2t)d\mathbf{1}_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (s+2t+1)a - bs - c - 2dt \\ (-a + (3t+3)b - 2c - 3dt)\mathbf{1}_s \\ -a - 2bs + (2s+t+1)c - dt \\ (-2a - 3sb - c + (3s+3)d)\mathbf{1}_t \end{bmatrix}.$$

https://proceedings.science/p/85315?lang=pt-br

Utilizando as equações de autovalor-autovetor de 10, temos

$$\begin{bmatrix} (s+2t+1)a - bs - c - 2dt \\ (-a + (3t+3)b - 2c - 3dt)\mathbf{1}_s \\ -a - 2bs + (2s+t+1)c - dt \\ (-2a - 3sb - c + (3s+3)d)\mathbf{1}_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda a \\ \lambda b\mathbf{1}_s \\ \lambda c \\ \lambda d\mathbf{1}_t \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} a \\ b\mathbf{1}_s \\ c \\ d\mathbf{1}_t \end{bmatrix}.$$

Logo, λ é autovalor de $\mathcal{D}^L(V(s,t,3))$ com autovetor associado $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} a \\ b\mathbf{1}_s \\ c \\ d\mathbf{1}_t \end{bmatrix}$.

É importante notar que

$$\langle \mathbf{y}, \mathbf{w} \rangle = 0;$$
$$\langle \mathbf{y}, \mathbf{v} \rangle = 0;$$
$$\langle \mathbf{w}, \mathbf{v} \rangle = 0.$$

Por fim, utilizando o *software Maple*, calculamos o polinômio característico de B:

$$P_B(x) = x(x^3 - (6(s+t)+8)x^2 + (11(s^2+t^2) + 31(s+t) + 23st + 21)x -$$
$$-6(s^3+t^3+10st) - 21st(s+t) - 27(s^2+t^2) - 39(s+t) - 18).$$

Portanto, $Sp(\mathcal{D}^L(V(s,t,3))) = (0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, 2s + 3(t+1)^{[s-1]}, 3(s+1) + 2t^{[t-1]})$, onde λ_1, λ_2 e λ_3 são as raízes do polinômio

$$f(x) = x^3 - (6(s+t)+8)x^2 + (11(s^2+t^2) + 31(s+t) + 23st + 21)x -$$
$$-6(s^3+t^3+10st) - 21st(s+t) - 27(s^2+t^2) - 39(s+t) - 18).$$

□

Optamos por não estudar neste momento duplas vassouras com diâmetro maior do que 3, já que conforme o diâmetro aumenta, o tamanho da matriz reduzida também aumenta.

Referências

Aouchiche, M. e Hansen, P. (2011). A laplacian for the distance matrix of a graph. *Les Cahiers du GERAD*, G–2011–77.

Aouchiche, M. e Hansen, P. (2013). Two laplacians for the distance matrix of a graph. *Linear Algebra Appl*, 439(1):21–33.

Aouchiche, M. e Hansen, P. (2014). Distance spectra of graphs: A survey. *Linear Algebra and its Applications*, 458:301–386.

Brunel, M. (1895). *Mémoires*. Soc. Sci. Bordeaux.

da Silva Junior, C. M. e Nikiforov, V. (2015). Graph functions maximized on a path. *Linear Algebra and its Applications*, 485:21–32.

Fallat, S. e Kirkland, S. (1998). Extremizing algebraic connectivity subject to graph theoretic constraints. *Electronic Journal of Linear Algebra*, 3(7).

Graham, R. e Pollack, H. (1971). On the addressing problem for loop switching. *Bell System Tech*, 50:2495–2519.

https://proceedings.science/p/85315?lang=pt-br

Lin, H. e Lu, X. (2015). Bounds on the distance signless laplacian spectral radius in terms of clique number. *Linear and Multilinear Algebra*, (63):1750–220.

Nath, M. e Paul, S. (2014). On the distance laplacian spectra of graphs. *Linear Algebra and its Applications*, 460:97–110.

https://proceedings.science/p/85315?lang=pt-br